1ère 6 S

Correction du contrôle sur les suites (Fait le 28/11/13)

1

Exercice 1 :

1) $u_1 = \frac{1^2}{2\times 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$; $u_2 = \frac{2^2}{2\times 2} = \frac{4}{4} = \boxed{1}$; $u_3 = \frac{3^2}{2\times 3} = \frac{9}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$

$u_4 = \frac{4^2}{2\times 4} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$; $u_5 = \frac{5^2}{2\times 5} = \boxed{\frac{5}{2}}$; $u_6 = \frac{6^2}{2\times 6} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{2\times(n+1)} - \frac{n^2}{2n} = \frac{(n^2+2n+1)\times n}{2n(n+1)} - \frac{n^2(n+1)}{2n(n+1)}$

$$= \frac{\cancel{n^3} + 2n^2 + n - \cancel{n^3} - n^2}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2+n}{2n(n+1)} = \frac{\cancel{n}(\cancel{n+1})}{2\cancel{n}(\cancel{n+1})} = \frac{1}{2} > 0$$

D'où $(u_n)_n$ est une suite strictement croissante

(Remarque : $u_n = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n$)

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2(n+1)}} \times \frac{\cancel{2n}}{n^{\cancel{2}}} = \frac{n+1}{n} = \boxed{1 + \frac{1}{n}}$

4) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$ car $\frac{1}{n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2

1) a) Comme $(v_n)_n$ est arithmétique de raison r, alors : $v_{100} = v_{15} + (100-15)\times r$

d'où $11 = -2 + 85\times r$

$13 = 85r$ donc $\boxed{r = \frac{13}{85}}$

on a aussi : $v_{15} = v_0 + 15 \times \frac{13}{85}$ d'où $-2 = v_0 + 3\times\frac{13}{17} = v_0 + \frac{39}{17}$

d'où $-\frac{34}{17} - \frac{39}{17} = v_0$

donc $v_0 = \frac{-73}{17}$

b) $S_{100} = v_0 + v_1 + \dots + v_{100} = 101 \times \frac{v_0 + v_{100}}{2} = 101 \times \frac{\frac{-73}{17} + 11}{2} = 101 \times \frac{\frac{-73+187}{17}}{2} = 101 \times \frac{57}{17}$

$\simeq 338{,}6$

2) $\begin{cases} w_{n+1} = w_n + \frac{1}{3} \\ w_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$

a) $(w_n)_n$:

Cette suite est par définition une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $w_0 = \frac{1}{2}$

D'où : $w_n = w_0 + n \times r$

Donc $\underline{w_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}}$

b) $S_{25} = w_0 + w_1 + \cdots + w_{25}$

$$= 26 \times \frac{w_0 + w_{25}}{2} = 26 \times \frac{\frac{1}{2} + w_{25}}{2} = 13 \times \left(\frac{1}{2} + w_{25}\right)$$

Calcul de w_{25} : $w_{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 25 = \frac{25}{3} + \frac{1}{2} = \frac{50}{6} + \frac{3}{6} = \frac{53}{6}$

Donc : $S_{25} = 13 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{53}{6}\right) = 13 \times \left(\frac{56}{6}\right) = 13 \times \frac{28}{3} = \frac{364}{3}$
$\underline{\simeq 121,3}$