Correction du contrôle n°2

(Fait le 03/10/11)

Exercice (1) :

1) $5x^2+14x-3 \geq 0$

calcul de Δ : $\Delta = b^2-4ac$

$= 14^2 - 4\times5\times(-3)$

$= 196+60$

$= 256 > 0$

Le trinôme a donc 2 racines :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-14+\sqrt{256}}{10}$

$= \dfrac{-14+16}{10}$

$= \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-14-\sqrt{256}}{10}$

$= \dfrac{-14-16}{10}$

$= \dfrac{-30}{10} = -3$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines

or, $a = 5 > 0$

D'où :

$S =]-\infty ; -3] \cup [\frac{1}{5} ; +\infty[$

2) $7x^2-2x+13>0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 4\times7\times13$

$= -360 < 0$

d'où le trinôme n'a pas de racine.

Le trinôme est toujours du signe de a.

or, $a = 7 > 0$

Donc :

$S = \mathbb{R}$

3) $2x^2-24x+72>0$

$\Delta = b^2-4ac$

$= (-24)^2 - 4\times2\times72$

$= 0$ d'où le trinôme n'admet qu'une seule racine.

Le trinôme est toujours du signe de a et s'annule en $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{24}{2\times2} = 6$

or, $a = 2 > 0$

Donc $S = \mathbb{R} \setminus \{6\}$

Exercice (2) :

1) $f(x) = 6x - x^2 - 8 = -x^2+6x-8$ $\begin{cases} a=-1<0 \\ b=6 \\ c=-8 \end{cases}$ donc la parabole représentant f est orientée vers le bas (ce qui exclut (P_1))

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-2} = 3$ D'où (P_2) représente f

$g(x) = -(x+3)(x-1)$. $a = -1 < 0$ donc la parabole représentant g est orientée vers le bas

D'autre part, $-(x+3)(x-1) = -x^2+x-3x+3 = -x^2-2x+3 \neq f(x)$

Donc : (P_3) représente g

2) Il faut résoudre l'équation $f(x)=0$ pour déterminer les antécédents de 0 par f.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+6x-8=0$

calcul de Δ : $\Delta = b^2-4ac$

$= 36-4\times(-1)\times(-8)$

$= 4 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+\sqrt{4}}{-2} = \dfrac{-6+2}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-\sqrt{4}}{-2} = \dfrac{-6-2}{-2} = 4$

Donc 0 a deux antécédents par f : 2 et 4

3) Pour déterminer les abscisses des points d'intersection de (P_2) avec (P_3) on va résoudre $f(x)=g(x)$.

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x^2+6x-8 = -(x^2+2x-3)$

$\Leftrightarrow \cancel{-x^2}+6x-8 = \cancel{-x^2}-2x+3$

$\Leftrightarrow 8x = 11$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{11}{8}$

On a : $g\left(\dfrac{11}{8}\right) = -\left(\dfrac{11}{8}+3\right)\left(\dfrac{11}{8}-1\right)$

$= -\left(\dfrac{121}{64}+\dfrac{11}{4}-3\right)$

$= -\dfrac{121}{64}+\dfrac{176}{64}+\dfrac{192}{64}$

$= -\dfrac{105}{64}$

Donc $I\left(\dfrac{11}{8}; -\dfrac{105}{64}\right)$ est le point d'intersection de (P_2) avec (P_3).

4) a) sur $\left[-3; \dfrac{11}{8}\right]$, $f(x) \leq g(x)$ et sur $\left[\dfrac{11}{8}; 5\right]$, $f(x) \geq g(x)$

c'est-à-dire sur $\left[-3; \dfrac{11}{8}\right]$, (P_2) est en-dessous de (P_3)

et sur $\left[\dfrac{11}{8}; 5\right]$, (P_3) est en-dessus de (P_2)

b) Résolvons $f(x) \leq g(x)$ algébriquement :

$f(x) \leq g(x) \iff -x^2+6x-8 \leq -x^2-2x+3$

$\iff 6x-8 \leq -2x+3$

$\iff 8x \leq 11$

$\iff x \leq \frac{11}{8}$

D'où pour $x \in [-3 ; \frac{11}{8}]$, (P_2) est en-dessous de (P_3)

et pour $x \in [\frac{11}{8} ; 5]$, (P_2) est au-dessus de (P_3)

5) Notons h ce trinôme :

sa parabole représentative est la (P_1). Elle est orientée vers le haut

et -3 et 1 sont les racines de h.

D'où : $h(x) = a(x+3)(x-1)$

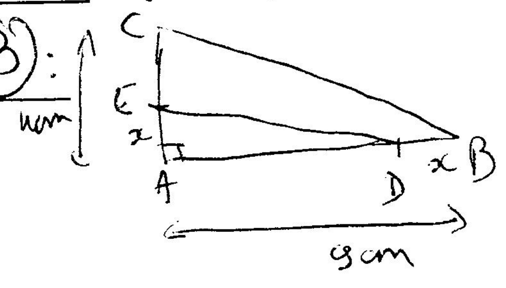
Or, $h(-1) = -4$ d'où $a \times (-1+3)(-1-1) = -4$

$\iff -4a = -4$

$\iff a = 1$

Donc : $h(x) = (x+3)(x-1) = x^2+2x-3$

Exercice 3 :



Aire$(ABC) = \frac{9 \times 4}{2} = 18 \text{ cm}^2$ | Aire$(ADE) = \frac{(9-x)(x)}{2} = \frac{9x-x^2}{2}$

Aire$(ABC) = 2 \times$ Aire(ADE)

d'où $18 = 9x - x^2$

$\iff -x^2+9x-18 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 81 - 4 \times (-1) \times (-18)$

$= 81 - 72 = 9 > 0$. L'équation admet deux solutions

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+3}{-2} = 3$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-3}{-2} = 6$

Pour x_2, c'est impossible car $AC = 4$ cm alors $AE > AC$.

Donc pour $x = 3$, l'aire de ABC vaut le double de celle de ADE