$1^{e}S$

Correction du DM n° 1

(rendu le 07/10)

1

Exercice 1 :

1) a) $x^4 + x^2 - 12 = 0 \ (E_1)$

on pose $X = x^2$

$(E_1) \Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0$

calcul de Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 + 48 = 49 > 0$ d'où

l'équation admet deux solutions

$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{49}}{2} = \frac{-1+7}{2}$

$= 3$

et $X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{49}}{2} = \frac{-1-7}{2}$

$= -4$

On a : $x_1^2 = X_1 = 3$

d'où $x_1 = \sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$

$x_2^2 = X_2 = -4 < 0$ pas de solution

Donc :

$S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

b) $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0 \ (E_2)$

on pose $X = x^2$

$(E_2) \Leftrightarrow 2X^2 + 7X + 3 = 0$

Calcul de Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 49 - 4 \times 2 \times 3$

$= 25 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions.

$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$

et $X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

On a $x_1^2 = X_1 = -\frac{1}{2}$, pas de solution

$x_2^2 = X_2 = -3$, pas de solution

Donc : $S = \emptyset$

2) $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - 2 = 0 \ (E_3)$. On pose $X = \frac{1}{x+1}$

valeur interdite : $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$(E_3) \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$

calcul de Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \times 1 \times (-2)$

$= 9 > 0$ d'où l'équation

admet deux solutions. $X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2} = 1$

$X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-1-3}{2} = -2$

$X_1 = \frac{1}{x_1+1} = 1$

d'où $x_1 + 1 = 1$

$x_1 = 0$

$X_2 = \frac{1}{x_2+1} = -2$

d'où : $x_2 + 1 = -\frac{1}{2}$ donc $x_2 = -\frac{3}{2}$

Donc $S = \{0 ; -\frac{3}{2}\}$

Exercice 2 :

1) $S = \frac{7}{6}$ $P = \frac{1}{3}$ - Notons x_1 et x_2, les 2 nombres cherchés

x_1 et x_2 sont solutions de l'équation :

$$x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$

calcul de Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= \frac{49}{36} - \frac{4}{3} = \frac{49}{36} - \frac{48}{36} = \frac{1}{36} > 0$ d'où l'équation admet

deux solutions. $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{6}+\frac{1}{6}}{2} = \frac{\frac{8}{6}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{6}-\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{2}{3} ; \frac{1}{2}\right\}$ (Vérification : $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$)

2) Aire $= L \times \ell = 84\ cm^2$ - Périmètre $= 2 \times (L + \ell) = 38$

d'où $L + \ell = 19$

Alors : L et ℓ sont solutions de l'équation :

$$x^2 - 19x + 84 = 0$$

calcul de Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (19)^2 - 4 \times 1 \times 84 = 25 > 0$ d'où l'équation admet 2

solutions. $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{19+5}{2} = \frac{24}{2} = 12$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{19-5}{2} = \frac{14}{2} = 7$

d'où $L = 12\ cm$, $\ell = 7\ cm$

(Vérification : $L \times \ell = 12 \times 7 = 84\ cm^2$ - $(L + \ell) \times 2 = 19 \times 2 = 38\ cm$)

Exercice 3 :

1) $P(-2) = 3(-2)^3 + 8(-2)^2 - (-2) - 10$

$= 3 \times (-8) + 32 + 2 - 10$

$= -24 + 24 = \boxed{0}$

2) $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$

$= ax^3 + x^2(b + 2a) + x(c + 2b) + 2c$

D'où par identification : $\begin{cases} b + 2a = 8 \\ c + 2b = -1 \\ 2c = -10 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} c = -5 \\ 2b = -1 + 5 = 4 \\ 2a = 8 - b \end{cases}$ $\begin{cases} c = -5 \\ b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$

Donc : $P(x) = (x+2)(3x^2 + 2x - 5)$

3) $P(x)=0 \iff (x+2)(3x^2+2x-5)=0$

$\iff x+2=0$ ou $3x^2+2x-5=0$

$\iff x=-2$ ou $3x^2+2x-5=0 \ (E)$

calcul de Δ : $\Delta = b^2-4ac$

$= 4-4\times 3\times(-5)$

$= 64 > 0$ d'où l'équation (E) a deux solutions

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+8}{6} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-8}{6} = \dfrac{-10}{6}$

$= -\dfrac{5}{3}$

Donc : les solutions de l'équation $P(x)=0$ sont :

$S=\left\{-2\,;\,1\,;\,-\dfrac{5}{3}\right\}$

4) On sait que : $P(x)=(x+2)(3x^2+2x-5)$

Or $3x^2+2x-5$ a pour racines : 1 et $-\dfrac{5}{3}$

D'où ce trinôme se factorise sous la forme : $3(x-1)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)$

Donc : $P(x)=3(x+2)(x-1)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)$

5) $P(x) \geq (x-1)(x+2) \iff 3(x+2)(x-1)\left(x+\dfrac{5}{3}\right) \geq (x-1)(x+2)$

$\iff (x+2)(x-1)\left(3\left(x+\dfrac{5}{3}\right)-1\right) \geq 0$

$\iff (x+2)(x-1)(3x+4) \geq 0$

$x+2 \geq 0$	$x-1 \geq 0$	$3x+4 \geq 0$
$x \geq -2$	$x \geq 1$	$x \geq -\dfrac{4}{3}$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

$S=\left[-2\,;\,-\dfrac{4}{3}\right]\cup[1\,;+\infty[$