1ère S

Correction du bac blanc (1)

(Fait le 14/01/14)

Exercice (1) :

1) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{-3x^2+2x+1}$ — f est définie si et seulement si $-3x^2+2x+1\neq 0$

$-3x^2+2x+1=0$

calcul de Δ : $\Delta=b^2-4ac$

$=4-4\times(-3)\times 1$

$=16>0$ d'où le trinôme admet deux racines :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+4}{-6}=\dfrac{2}{-6}=-\dfrac{1}{3}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-4}{-6}$

$=1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\,;1\right\}$

b) $f(x)=0 \iff 2x^2+5x-3=0$

calcul de Δ : $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times 2\times(-3)$

$=25+24=49>0$ donc le trinôme admet 2 racines.

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-7}{4}=-3$

Donc $S=\left\{\dfrac{1}{2}\,;-3\right\}$

c) Posons $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ $\quad g(x)=2x^2+5x-3$ — $h(x)=-3x^2+2x+1$

• g est du signe de 2 (c'est-à-dire positif) à l'extérieur de ses racines sur $]-\infty;-3]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

• h est du signe de -3 (c'est-à-dire négatif) à l'extérieur de ses racines sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty[$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de g		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de h		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
signe de f		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc :

$S=\left[-3;-\dfrac{1}{3}\right[\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right[$

2) $(u_n)_n$ arithmétique avec $u_6 = 27$ et $u_{20} = 62$

a) $u_n = u_p + (n-p)\times r$ d'où $u_{20} = u_6 + 14r$

$\iff 62 = 27 + 14r$

$\iff 14r = 62 - 27$

$\iff 14r = 35$

$\iff r = \frac{35}{14} = \frac{\cancel{7}\times 5}{\cancel{7}\times 2} = \boxed{\frac{5}{2}}$

b) $S = u_7 + u_8 + \dots + u_{30}$ - Nombre de termes $= 30 - 7 + 1 = 24$

Or $S =$ nombre de termes $\times \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$= 24 \times \frac{u_7 + u_{30}}{2} = 12\times(u_7 + u_{30})$

$u_7 = u_6 + r = 27 + \frac{5}{2} = \frac{59}{2}$ et $u_{30} = u_{20} + 10\times\frac{5}{2}$

$= 62 + 25 = 87$

Donc: $S = 12\times\left(\frac{59}{2} + 87\right) = 12\times\left(\frac{59}{2} + \frac{174}{2}\right) = 6\times(233) = \underline{1398}$

3) a) $\sqrt{1-x} = x+1$ - Cette équation est définie si et seulement si

$1 - x \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$

$\iff x \leq 1$ et $x \geq -1$

$\iff \underline{x \in [-1 ; 1]}$

b) On prend le carré des deux membres de l'égalité :

On obtient : $1 - x = (x+1)^2 \iff 1 - x = x^2 + 2x + 1$

$\iff x^2 + 3x = 0$

$\iff x(x+3) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x + 3 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = -3$

$\underline{S = \{0\}}$ car $-3 \notin [-1 ; 1]$

Exercice 2 :

$u(x) = 2x^2 + 2x - 4$

1) $a = 2 > 0$ d'où la parabole représentant u est orientée vers le haut. u est donc d'abord décroissante, puis ensuite croissante.

soit S : le sommet de la parabole $S(\alpha ; \beta)$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{4}$
$= -\frac{1}{2}$

et $\beta = u(\alpha) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 4$
$= \frac{1}{2} - 1 - 4 = \frac{1}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{9}{2}$

D'où le tableau de variations de u :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de u	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$

2) voir graphique

3) $f = \sqrt{u}$

a) f est définie si et seulement si $u(x) \geqslant 0$
$\iff 2x^2 + 2x - 4 \geqslant 0$

calcul de Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times 2\times(-4) = 36 > 0$ d'où le trinôme admet deux racines. $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+6}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6}{4}$
$= -2$

Le trinôme est du signe de 2 (c'est-à-dire positif) à l'extérieur de ses racines

Donc $S =]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$

c'est-à-dire : $\underline{D_f =]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[}$

b) On sait que $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

$f = \sqrt{u}$ aura les mêmes variations que u sur D_f.

c'est-à-dire : f sera strictement décroissante sur $]-\infty ; -2]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Variations de f		↘	0		0	↗	

4) $g = |u|$

a) $g(x) = |2x^2+2x-4|$. Or, d'après la question 3 a), on sait que

$$2x^2+2x-4 \geqslant 0 \text{ pour } x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$$

Donc :

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 2x^2+2x-4 & \text{pour } x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[\\ -2x^2-2x+4 & \text{pour } x \in [-2;1] \end{cases}}$$

b) - Sur $]-\infty;-2] \cup [1;+\infty\{$, $g(x) = u(x)$: on a déjà les variations de u (question 1).

- sur $[-2;1]$, $g(x) = -u(x)$: les variations seront contraires à celles de u.

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Variations de g		↘	0	↗	$\frac{9}{2}$	↘	0	↗	

- Pour u, on avait $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{9}{2}$

- Pour g sur $[-2;1]$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{9}{2}$ (car $g(x) = -u(x)$ sur $[-2;1]$).

5) $h = -\frac{2}{u}$

a) h est définie si et seulement si $2x^2+2x-4 \neq 0$

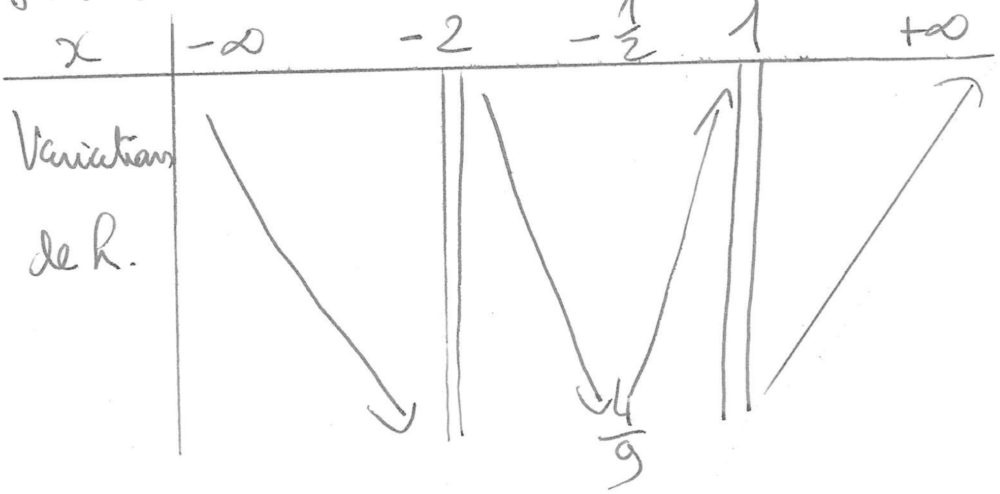
D'après les calculs précédents : $\underline{D_h = \mathbb{R} \setminus \{1;-2\}}$

- sur $]-\infty;-2[$, $u>0$, $\frac{1}{u}$ aura des variations contraires à celles de u d'où $\frac{-2}{u}$ aura les mêmes variations que u

- sur $]1;+\infty[$, $u>0$, même chose.

- sur $]-2;1[$, $u<0$: $-\frac{2}{u}$ aura les mêmes variations que u.

D'où le tableau de variations suivant:



$$h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{u\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{+2}{+\frac{9}{2}}=\frac{4}{9}$$

Exercice 3:

Variables	Initialisation	$1^{ère}$ étape	$2^{ème}$ étape	$3^{ème}$ étape
i		1	2	3
U	100	$0,8\times100+40$ 120	$0,8\times120+40$ 136	$0,8\times136+40$ 148,8

2) $\begin{cases} u_0=100 \\ u_{n+1}=0,8u_n+40 \end{cases}$

Partie B:

1) En janvier 2010 : 100 vélos neufs. - En janvier 2011 : On en garde 80% et on a ajouté 40

$100\times0,8+40=120$ vélos.

En janvier 2012 : $120\times0,8+40=136$ vélos.

2) Chaque année, on obtient le nombre de vélos en prenant 80% de l'année précédente et en ajoutant 40 vélos.

En 2010, il y a 100 vélos - Or, $2010 = 2010 + \underset{n}{\underset{\shortparallel}{0}}$

Le nombre de vélos en janvier 2010+n peut être modélisé par :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 40 \end{cases}$$

3) $u_1 = 0{,}8u_0 + 40 = 120$ $\qquad u_2 = 0{,}8u_1 + 40 = 136$

$u_1 - u_0 = 120 - 100 = 20$ $\qquad u_2 - u_1 = 136 - 120 = 16$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ d'où $(u_n)_n$ n'est pas arithmétique.

D'autre part, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{120}{100} = 1{,}20$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{136}{120} \simeq 1{,}13$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ d'où $(u_n)_n$ n'est pas géométrique

4) a) Voir graphique

b) Conjecture : $(u_n)_n$ semble être une suite strictement croissante.

5) $v_n = u_n - 200$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0{,}8u_n + 40 - 200$
$= 0{,}8u_n - 160 = 0{,}8(u_n - 200)$
$= 0{,}8\,v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de 1er terme

b) $v_0 = u_0 - 200 = 100 - 200 = -100$

c) Comme $(v_n)_n$ est géométrique de raison 0,8 et de 1er terme -100

$$v_n = -100 \times (0{,}8)^n$$

D'autre part, $u_n = v_n + 200 = 200 - 100 \times 0{,}8^n$

6) a) $u_{n+1} - u_n = \cancel{200} - 100 \times 0{,}8^{n+1} - \cancel{200} + 100 \times 0{,}8^n$

$= -100 \times 0{,}8 \times 0{,}8^n + 100 \times 0{,}8^n$

$= 0{,}8^n(-80+100) = \underline{20 \times 0{,}8^n}$

b) $0{,}8^n > 0$ d'où $20 \times 0{,}8^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

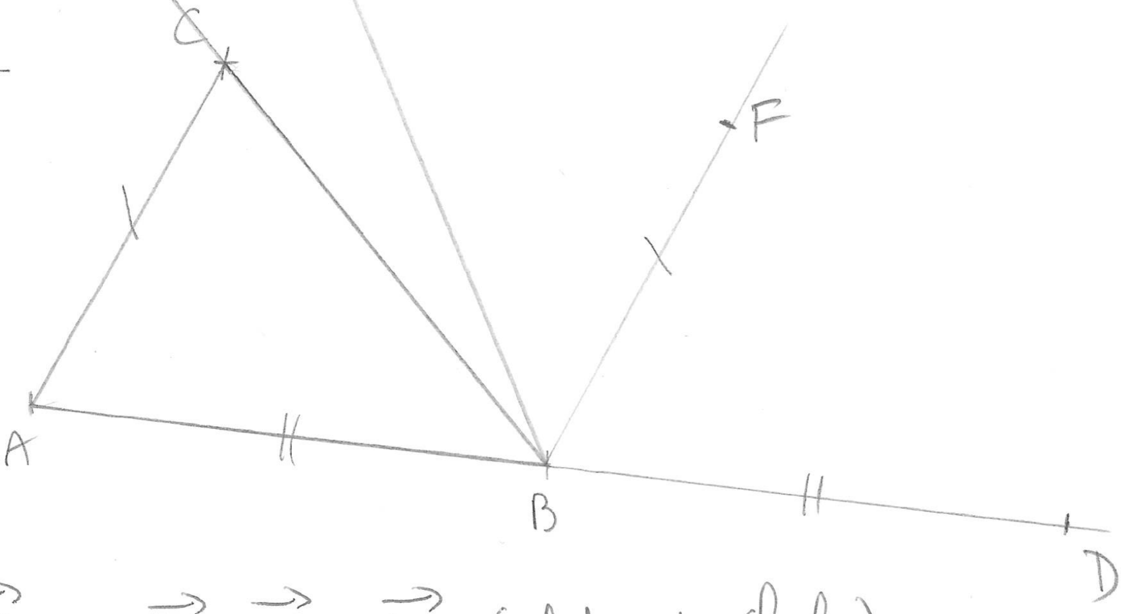
Autrement dit : (u_n) est strictement croissante

7) $2025 = 2010 + 15$: $n = 15$

On calcule u_{15} : $u_{15} = 200 - 100 \times 0{,}8^{15} \simeq 196$

En janvier 2025, environ 196 vélos seront disponibles.

Exercice 4 :



2) a) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC} + \cancel{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{EF} = \cancel{\overrightarrow{AC}}$

$\Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{CB}}$

b) $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD}$ (relation de Chasles)

Or, $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$

D'où $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

3) D'après les questions 2 a) et 2 b), $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{FD}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires avec un point commun

Donc : $\boxed{\text{E, F et D sont alignés}}$

Partie (B) :

Dans $(A ; \vec{AB}, \vec{AC})$:

1) A est l'origine du repère, d'où $\underline{A(0;0)}$

$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC}$ d'où $\underline{B(1;0)}$

$\vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC}$ d'où $\underline{C(0;1)}$

$\vec{AD} = 2\vec{AB} + 0\vec{AC}$ d'où $\underline{D(2;0)}$

$\vec{BE} = 2\vec{BC} + \vec{AC}$

$\Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{AE} = 2\vec{BA} + 2\vec{AC} + \vec{AC}$
(relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \vec{AE} = -\vec{AB} + 3\vec{AC}$

d'où $\underline{E(-1;3)}$

$\vec{BF} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{AF} = \vec{AC}$

$\Leftrightarrow \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$ d'où $\underline{F(1;1)}$

2) $\vec{EF}(x_F - x_E ; y_F - y_E)$ $\vec{EF}(2;-2)$

$\vec{FD}(x_D - x_F ; y_D - y_F)$ $\vec{FD}(1;-1)$ $\Big\}$ $\vec{EF} = 2\vec{FD}$

3) $\vec{EF}$ et $\vec{FD}$ sont colinéaires avec un point commun

Donc $\underline{E, F \text{ et } D \text{ sont alignés}}$.

Partie (C) :

Dans $(A ; \vec{AB}, \vec{AC})$, $A(0;0)$, $C(0;1)$, $D(2;0)$
$F(1;1)$

1) $\vec{AD}(x_D - x_A ; y_D - y_A)$ $\vec{AD}(2;0)$

$\vec{CF}(x_F - x_C ; y_F - y_C)$ $\vec{CF}(1;0)$

$\vec{AD} = 2\vec{CF}$ donc $\vec{AD}$ et $\vec{CF}$ sont colinéaires

ce sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (AD) et (CF)

Donc $\underline{(AD) \parallel (CF)}$

2) ADGC parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{CG}$

On pose $G(x_G ; y_G)$ $\vec{CG}(x_G - x_C ; y_G - y_C)$ $\vec{CG}(x_G ; y_G - 1)$

Or, $\vec{AD}(2;0)$ d'où $\vec{AD} = \vec{CG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{G(2;1)}$

3) $\vec{CF}(1;0)$ et $\vec{CG}(2;0)$, $\vec{CF}$ et $\vec{CG}$ sont colinéaires avec un point commun $\Big\}$ Donc : C, F, G alignés