Première S	**Corrigé de l'examen blanc n°2**	Fait le 08/04/2014

Exercice 1 :

1) n = 10

a) X = {10 ; -1} b)

x_i	10	-1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

c) $E(X) = 10\times\frac{1}{11} - 1\times\frac{10}{11} = \underline{\mathbf{0}}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) X = {10 ; -1} b)

x_i	10	-1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$

$E(X) = 10\times\frac{1}{n+1} - 1\times\frac{n}{n+1} = \boxed{\frac{10-n}{n+1}}$

c) $E(X) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{10-n}{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow 10 - n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 10$ Par conséquent : $\underline{1 \leq n \leq 10}$

d) $E(X) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{10-n}{n+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2(10-n) = n + 1$ (produit en croix)

$\Leftrightarrow -20 + 2n = n + 1$

$\Leftrightarrow \underline{n = 21}$

e) $E(X) = \frac{10-n}{n+1} = \frac{-(n+1)+11}{n+1} = -1 + \frac{11}{n+1}$

Quand n devient grand, $\frac{11}{n+1}$ « s'approche » de 0 sans jamais l'atteindre.

Donc : <u>Quand n devient grand, E(X) s'approche de – 1</u>

Exercice 2 :

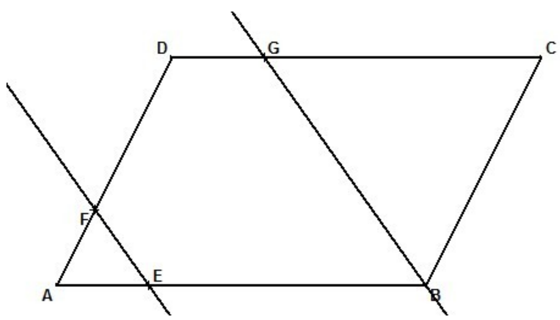
ABCD et un parallélogramme.

1) On sait que $2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FD} = \vec{0}$ d'où : $2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ (par la relation de Chasles)

$3\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$

$$\boxed{\text{Donc : } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$$

2)



3) a) Comme $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, on a , d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

D'où : $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$$\boxed{\text{Donc : } \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$$

b) $\overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ (d'après la relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)

$= \frac{3}{4}(\overrightarrow{CD} + \cancel{\overrightarrow{DA}} + \cancel{\overrightarrow{AD}}) + \overrightarrow{BC}$ or, ABCD étant un parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\text{Donc : } \overrightarrow{BG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$$

c) On a $\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{EF}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires Donc : **<u>(BG) // (EF)</u>**

4) Dans (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) :

a) **<u>A(0;0)</u>** (c'est l'origine du repère) **<u>B(1;0)</u>** (car $\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD}$)

<u>D(0;1)</u> (car $\overrightarrow{AD} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AD}$)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (règle du parallélogramme) Donc : **<u>C(1;1)</u>**

Comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD}$ Donc : **<u>E($\frac{1}{4}$;0)</u>**

De même, comme $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, alors **<u>F(0 ; $\frac{1}{3}$)</u>**

Comme $\overrightarrow{BG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ Donc : **<u>G($\frac{1}{4}$;1)</u>**

b) <u>Droite (AC) :</u> A(0;0) et C(1;1) d'où : $\overrightarrow{AC}$ (1;1)

Or, $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (AC) on peut poser - b = 1 et a = 1

D'où une équation cartésienne de (AC) est (AC) : x – y + c = 0

Or, A ∈ (AC), d'où : 0 – 0 + c = 0 Par conséquent : **<u>(AC) : x – y = 0</u>**

<u>Droite (FB) :</u> F(0 ; $\frac{1}{3}$) et B(1;0) $\overrightarrow{FB}$ (1 ; - $\frac{1}{3}$) : vecteur directeur de (FB)

On pose – b = 1 et a = - $\frac{1}{3}$

D'où : (FB) : - $\frac{1}{3}$ x – y + c = 0 . Or, B ∈ (FB) , d'où : - $\frac{1}{3}$ + c = 0 donc : c = $\frac{1}{3}$

Donc : **<u>(FB) : - $\frac{1}{3}$ x – y + $\frac{1}{3}$ = 0</u>**

C'est-à-dire : (FB) : x + 3y – 1 = 0 (en ayant multiplié par -3)

c) Tout d'abord, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FB}$ ne sont pas colinéaires, donc (AC) et (FB) sont sécantes.

Soit I(x;y) le point d'intersection de ces deux droites :

(x;y) solution du système : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\boxed{\text{Donc } I\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)}$$

d) <u>Droite (GE) :</u> G($\frac{1}{4}$;1) et E($\frac{1}{4}$;0)

$x_G = x_E$, d'où (GE) est une droite verticale. Donc (GE) : x = $\frac{1}{4}$

Alors I ∈ (GE) : **<u>Par conséquent : (GE), (AC) et (FB) sont concourantes et le point de concours est le point I</u>**

e) Soit M le milieu de [EF] : $x_M = \frac{x_E + x_F}{2}$ $\quad y_M = \frac{y_E + y_F}{2}$

$= \frac{\frac{1}{4} + 0}{2} = \frac{1}{8}$ $\quad = \frac{0 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$ Donc : M($\frac{1}{8}$; $\frac{1}{6}$)

Or, (AC) : x – y = 0, M $\notin$(AC) car $\frac{1}{8} - \frac{1}{6} \neq 0$

Donc : **<u>(AC) ne coupe pas [EF] en son milieu</u>**

<u>Exercice 3 :</u>

u_n : désigne le nombre d'adhérents de l'association lors de la n-ième année

1) $u_1 = 1\,000$ $\quad u_2 = u_1 \times \frac{80}{100} + 300 = 0{,}8 \times 1\,000 + 300 = \underline{1\,100}$

$u_3 = u_2 \times \frac{80}{100} + 300 = 0{,}8 \times 1\,100 + 300 = \underline{1\,180}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$: u_{n+1} = nombre d'adhérents lors de la n+1-ième année

Chaque année, l'association perd 20% de ses adhérents, donc elle en garde 80% et 300 viennent s'ajouter.

Donc : $\boldsymbol{\underline{u_{n+1} = u_n \times 0{,}8 + 300}}$

3) $v_n = 1\,500 - u_n$

a) $v_{n+1} = 1\,500 - u_{n+1} = 1\,500 - (u_n \times 0{,}8 + 300)$
$= 1\,500 - u_n \times 0{,}8 - 300$
$= 1\,200 - u_n \times 0{,}8$
$= 0{,}8(1\,500 - u_n)$
$= 0{,}8\, v_n$

Donc : (v_n) est une suite géométrique de <u>raison 0,8</u> et de premier terme $\underline{v_1 =}\ 1\,500 - u_1 = \underline{500}$

b) Comme (v_n) est géométrique, $\underline{v_n =}\ v_1 \times q^{n-1} = \underline{500 \times 0{,}8^{n-1}}$

c) Or, $\underline{u_n} = 1\,500 - v_n = \underline{1\,500 - 500 \times 0{,}8^{n-1}}$

4) La dixième année : n = 10, u10 = $1\,500 - 500 \times 0{,}8^{10-1} \simeq 1\,433$

Il y aura environ <u>1 433 adhérents la dixième année</u>

<u>Exercice 4 :</u>

$f(x) = \frac{3x+1}{x-5}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \backslash \{5\}$

1) $h > 0$, $f(6+h) = \frac{3(6+h)+1}{6+h-5} = \frac{18+3h+1}{h+1} = \boxed{\frac{19+3h}{h+1}}$

2) Taux d'accroissement de f entre 6 et 6 + h = $\frac{f(6+h)-f(6)}{h}$

$$= \frac{\frac{19+3h}{h+1} - 19}{h}$$

$$= \frac{\frac{19+3h-19(h+1)}{h+1}}{h}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{19}+3h-19h-\cancel{19}}{h+1}}{h} = \frac{\frac{-16h}{h+1}}{h} = \frac{-16\cancel{h}}{h+1} \times \frac{1}{\cancel{h}} = \boxed{\frac{-16}{h+1}}$$

3) Par définition, $f'(6) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-16}{h+1} = -16$

Donc : $\underline{f'(6) = -16}$

4) (T_6) : $y = f'(6)(x-6) + f(6) = -16(x-6) + 19 = -16x + 115$

Donc l'équation réduite de (T_6) est $\boldsymbol{\underline{y = -16x + 115}}$

<u>Exercice 5 :</u>

1) Volume(parallélépipède) = Longueur × Largeur × Hauteur = $2x \times x \times y = 2x^2 \times y$

Or, Volume(parallélépipède) = 72 mm^3

Donc : $y = \frac{72}{2x^2} = \boxed{\frac{36}{x^2}}$

2) $A(x) = 2 \times 2x \times y + 2 \times xy + 2 \times 2x \times x$ (car il y a deux rectangles de dimensions 2x et y, deux autres rectangles de dimensions x et y et enfin deux derniers rectangles de dimensions 2x et x)

D'où : A(x) = $6xy + 4x^2 = 6x \times \dfrac{36}{x^2} + 4x^2 = \dfrac{216}{x^2} + 4x^2$

3) A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{A'(x) = -\frac{216}{x^2} + 4\times 2x = -\frac{216}{x^2} + 8x}$$

$$= \frac{8x^3-216}{x^2}$$

Or, $\dfrac{8(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2} = \dfrac{(8x-24)(x^2+3x+9)}{x^2} = \dfrac{8x^3+\cancel{24x^2}+\cancel{72x}\cancel{-24x^2}\cancel{-72x}-216}{x^2}$

$$= \frac{8x^3-216}{x^2}$$

Par conséquent :

$$\boxed{A'(x) = \frac{8(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}}$$

4) Sur]0;12] :

$x - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 3$

$x^2 + 3x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 36 = -27 < 0$

Donc le trinôme est toujours du signe de a (c'est-à-dire positif)

D'autre part : $x^2 > 0$ pour tout x de]0;12]

Donc : $A'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 3$

D'où le tableau de variations de A :

x	0		3		12
Signe de A '	‖	–	0	+	
Variations de A	‖	↘	108	↗	594

A(3) = 72 + 36 = 108 et A(12) = 18 + 4×144 = 594

5) A minimale ⇔ A' s'annule et change de signe d'où : A(3) est le minimum de A sur]0;12]

C'est-à-dire 108 mm^2 est l'aire minimale obtenue pour x = 3

D'où les dimensions du parallélépipède : $6 \times 3 \times \left(\dfrac{36}{9}\right)$ = **6mm ×3 mm × 4mm**