

1ère S

Corrigé du contrôle de mathématiques
Equations cartésiennes / Probabilités (Faut le 20/02)

(1)

Exercice 1:

$$\vec{AI} = 2\vec{AB}, \quad \vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AC}, \quad O \text{ milieu de } [BC]$$

1) Dans $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$: $\vec{AI} = 2\vec{AB} + 0\vec{AC}$

D'où $I(2; 0)$

et $\vec{AJ} = 0\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

D'où $J(0; \frac{2}{3})$

2) On a $\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC}$ d'où $B(1; 0)$

et $\vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC}$ d'où $C(0; 1)$.

$\vec{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$ $\vec{BC}(-1; 1)$ avec $\vec{BC}(-b; a)$

($\vec{BC}$: vecteur directeur de (BC))

D'où $(BC): x + y + c = 0$

or, $B \in (BC)$, d'où $1 + 0 + c = 0$

donc $c = -1$

Donc: $(BC): x + y - 1 = 0$

$\vec{IJ}(x_J - x_I; y_J - y_I)$ $\vec{IJ}(-2; \frac{2}{3})$: vecteur directeur de (IJ) .

D'où: $(IJ): \frac{2}{3}x + 2y + c = 0$

or, $I \in (IJ)$, d'où $\frac{4}{3} + 0 + c = 0$ d'où $c = -\frac{4}{3}$.

Donc: $(IJ): \frac{2}{3}x + 2y - \frac{4}{3} = 0$

$(IJ): 2x + 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2 = 0$

3) Tout d'abord, $\vec{IJ}$ et $\vec{BC}$ ne sont pas colinéaires.
alors (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles.

(IJ) et (BC) ont donc un point d'intersection.

Soient $(x; y)$ les coordonnées de ce point. Elles vérifient le

système suivant:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 1 - y + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Or, O milieu de $[BC]$, d'où $x_0 = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$
 et $y_0 = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

Donc: O est le point d'intersection de (I) et (BC) .

4) Soit $(d): ax + by + c = 0$ - $(d) \parallel (BC)$

alors $(d): x + y + c = 0$

Or, $I \in (d)$, d'où $2 + 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$

Donc: $(d): x + y - 2 = 0$

5) BONUS: $\vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC}$ d'où $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = -b \\ \leftarrow a \end{matrix}$
 (vecteur directeur de (AC))
 D'où $(AC): x + c = 0$, or $A \in (AC)$ d'où $c = 0$

Alors $(AC): x = 0$

Tant d'abord, (d) et (AC) ne sont pas parallèles (leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires).

Soient $(x; y)$ coordonnées du point d'intersection des deux droites.

$(x; y)$ vérifiant le système suivant $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Donc $M(0; 2)$ est le point d'intersection de (d) et (AC) .

Exercice 2:

1) on a $P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 5) + P(X = 7) = 1$

$\Rightarrow 0,05 + 0,16 + P(X = 5) + 0,54 = 1$

$\Rightarrow P(X = 5) = 1 - (0,05 + 0,16 + 0,54) = 1 - 0,75$

X	-4	-1	5	7
$P(X = k)$	0,05	0,16	0,25	0,54

$= \boxed{0,25}$

2) $Y = -2X$ variable aléatoire discrète. (3)

a) $E(Y) = E(-2X) = -2E(X)$. (Formule: $E(aX+b) = aE(X)+b$)

or, $E(X) = -4 \times 0,09 + (-1) \times 0,16 + 5 \times 0,25 + 7 \times 0,54$
 $= 4,67$.

Donc $E(Y) = -2 \times 4,67 = \boxed{-9,34}$

b) Tout d'abord: $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$

or, $V(Y) = V(-2X) = (-2)^2 V(X) = 4V(X)$

(Formule $V(aX) = a^2 V(X)$)

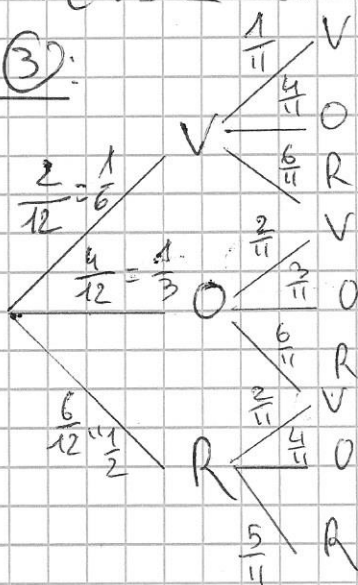
D'où $\sqrt{V(Y)} = \sqrt{4V(X)} = 2\sqrt{V(X)}$

or, $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots$
 $= 0,09(-4 - 4,67)^2 + 0,16(-1 - 4,67)^2 + 0,25(5 - 4,67)^2$
 $+ 0,54(7 - 4,67)^2$
 $= 11,8611$

Nous $\sigma(Y) = 2 \times \sqrt{11,8611} \approx \boxed{6,89}$

Exercice (3):

1)



2) L'événement V correspond à un seul chemin (celui du haut)

$P(V) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{11} = \boxed{\frac{1}{66}}$

L'événement R correspond à un seul chemin (celui tout en bas)

$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} = \boxed{\frac{5}{22}}$

$B \cap A$: "Ne pas obtenir de boule orange et obtenir au moins une boule verte"
 3 chemins correspondent à cet événement:

D'où $P(B \cap A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{11} + \frac{1}{6} \times \frac{6}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{11}$
 $= \frac{1}{66} + \frac{6}{66} + \frac{6}{66} = \boxed{\frac{13}{66}}$

$\bar{V}$: événement contraire de V

$\bar{V}$: "obtenir au moins une boule qui n'est pas de couleur verte"

$$P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 1 - \frac{1}{66} = \left[\frac{65}{66} \right]$$

$\bar{B}$: "obtenir au moins une boule orange"

$\bar{R}$: "obtenir au moins une boule qui n'est pas de couleur rouge"

$\bar{B} \cup \bar{R}$: "obtenir au moins une boule orange ou obtenir au moins une boule qui n'est pas de couleur rouge".

~~Cet événement correspond à~~

$$P(\bar{B} \cup \bar{R}) = P(\bar{B}) + P(\bar{R}) - P(\bar{B} \cap \bar{R})$$

Or, $\bar{B}$ correspond à 5 chemins.

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= \frac{1}{6} \times \frac{4}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} \\ &= \frac{2}{33} + \frac{2}{33} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} \\ &= \frac{19}{33} \end{aligned}$$

$$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{5}{22} = \frac{17}{22}$$

$\bar{B} \cap \bar{R}$: correspond à 5 chemins :

$$\begin{aligned} P(\bar{B} \cap \bar{R}) &= \frac{1}{6} \times \frac{4}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} \\ &= \frac{2}{33} + \frac{2}{33} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} \\ &= \frac{4}{33} + \frac{15}{33} = \frac{19}{33} \end{aligned}$$

Donc :

$$P(\bar{B} \cup \bar{R}) = \frac{19}{33} + \frac{17}{22} - \frac{19}{33} = \left[\frac{17}{22} \right]$$

3) a) $G = \{40-m, 25-m, 10-m, -5-m, -20-m\}$.

$$P(G=40-m) = \frac{1}{66}, \quad P(G=-20-m) = \frac{5}{22}$$

$$P(G=25-m) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{11} = \frac{4}{33}$$

(5)

$$P(G=10-m) = \frac{1}{6} \times \frac{6}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{11}$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$$

$$P(G=-5-m) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11}$$

$$= \frac{2}{11} + \frac{2}{11} = \frac{4}{11}$$

La loi de G:

R	40-m	25-m	10-m	-5-m	-20-m
P(G=k)	$\frac{1}{66}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{22}$

(Remarque: $\frac{1}{66} + \frac{4}{33} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{5}{22} = \frac{1}{66} + \frac{8}{66} + \frac{18}{66} + \frac{24}{66} + \frac{15}{66}$)

$$= \frac{66}{66} = [1].$$

b) $E(G) = \frac{1}{66}(40-m) + \frac{4}{33}(25-m) + \frac{3}{11}(10-m) + \frac{4}{11}(-5-m) + \frac{5}{22}(-20-m)$

$$= \left(-\frac{1}{66} - \frac{8}{66} - \frac{18}{66} - \frac{24}{66} - \frac{15}{66} \right) m + \frac{40}{66} + \frac{100}{33} + \frac{30}{11} - \frac{20}{11} - \frac{100}{22}$$

$$= -m + \frac{40+200+180-120-300}{66}$$

$$= -m$$

c) Pour que la partie soit équilibrée, $E(G)=0$
 d'où $m=0$