NOM : Prénom :

Option Maths expertes Terminale	<u>Devoir de mathématiques :</u> <i>Matrices</i>	Mercredi 29 janvier 2025
---------------------------------------	--	--------------------------

- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE :

Exercice 1 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

On souhaite montrer que M est inversible et expliciter M^{-1} de deux manières différentes

Méthode 1 :

- 1) Calculer $\det A$. Que peut-on en déduire ?
- 2) Déterminer explicitement M^{-1} en utilisant les formules.

Méthode 2 :

- 1) Montrer que $M^2 - 9M - 2I_2 = 0$ où I_2 est la matrice identité
- 2) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1} explicitement

Exercice 2 :

On considère le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 2x - 3y - 5z = -8 \\ -x + y + z = 4 \\ 3x - 2y - 7z = -5 \end{cases}$$

1) Traduire matriciellement le système (S), en posant A = la matrice du système, X la matrice-colonne des inconnues et B la matrice du second membre.

- 2) A l'aide de la calculatrice, montrer que A est inversible
- 3) Montrer avec soin que $X = A^{-1} \times B$
- 4) En déduire la résolution du système (S)

Exercice 3 :

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite déterminer explicitement A^n

NOM : Prénom :

- 1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
- 2) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- 3) Calculer D^n . Prouver le résultat par récurrence
- 4) Exprimer A^n en fonction de D^n en justifiant
- 5) En déduire explicitement A^n