NOM :………………………………………Prénom :……………………………

Option Maths Expertes Terminale	**Devoir n°3 : Congruences et divisibilité**	Mercredi 11 décembre 2024

- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : Cours

Les questions sont indépendantes

1) Enoncer précisément le théorème donnant l'équivalence entre congruence et divisibilité

2) Soient a, b, c et d, quatre entiers avec $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

   si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors $ac \equiv bd\ [n]$

Exercice 2 :

1) Montrer que $2024 \equiv -1\ [25]$
2) En déduire, en justifiant, le reste dans la division euclidienne de 2024^{2025} par 25

Exercice 3 :

1) Compléter en justifiant : $3^4 \equiv \ldots.\ [10]$

2) En déduire le chiffre des unités de 3^{4n+2}, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 4 :

On souhaite résoudre l'équation suivante (dans $\mathbb{Z}$) :

$$(E) : x^2 + 2x - 4 \equiv 0\ [5]$$

1) Compléter le tableau suivant de restes modulo 5 :

$x \equiv \ldots$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ldots$					
$2x \equiv \ldots$					
$2x - 4 \equiv \ldots$					
$x^2 + 2x - 4 \equiv \ldots$					

3) Conclure.

NOM :………………………………………Prénom :……………………………

Exercice 5 :

On souhaite retrouver le célèbre critère de divisibilité par 9 connu depuis notre enfance à l'aide de l'outils des congruences

Soit x, un entier naturel. On sait qu'il existe un entier naturel n, et n+1 nombres entiers naturels : $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ contenus chacun dans [0 ;9] tels que :

$$x = a_n\times10^n + a_{n-1}\times10^{n-1} + \dots + a_1\times10 + a_0$$

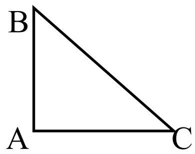
(Le nombre x s'écrit donc : $a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0$ avec ses chiffres)

1) Montrer que $10 \equiv 1$ [9]
2) En déduire en justifiant que : $x \equiv a_n+ a_{n-1}+ \dots + a_1+ a_0$ [9]
3) Compléter l'équivalence suivante : x est divisible par 9 $\Leftrightarrow$ $x \equiv$………[9]
4) En déduire que $a_n+ a_{n-1}+ \dots + a_1+ a_0 \equiv \dots$ [9]. Conclure.

Exercice 6 :

On considère trois nombres entiers positifs x, y et z.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : AB = y , AC = x et BC = z



Montrer que l'une au moins des mesures des côtés est un multiple de 5.