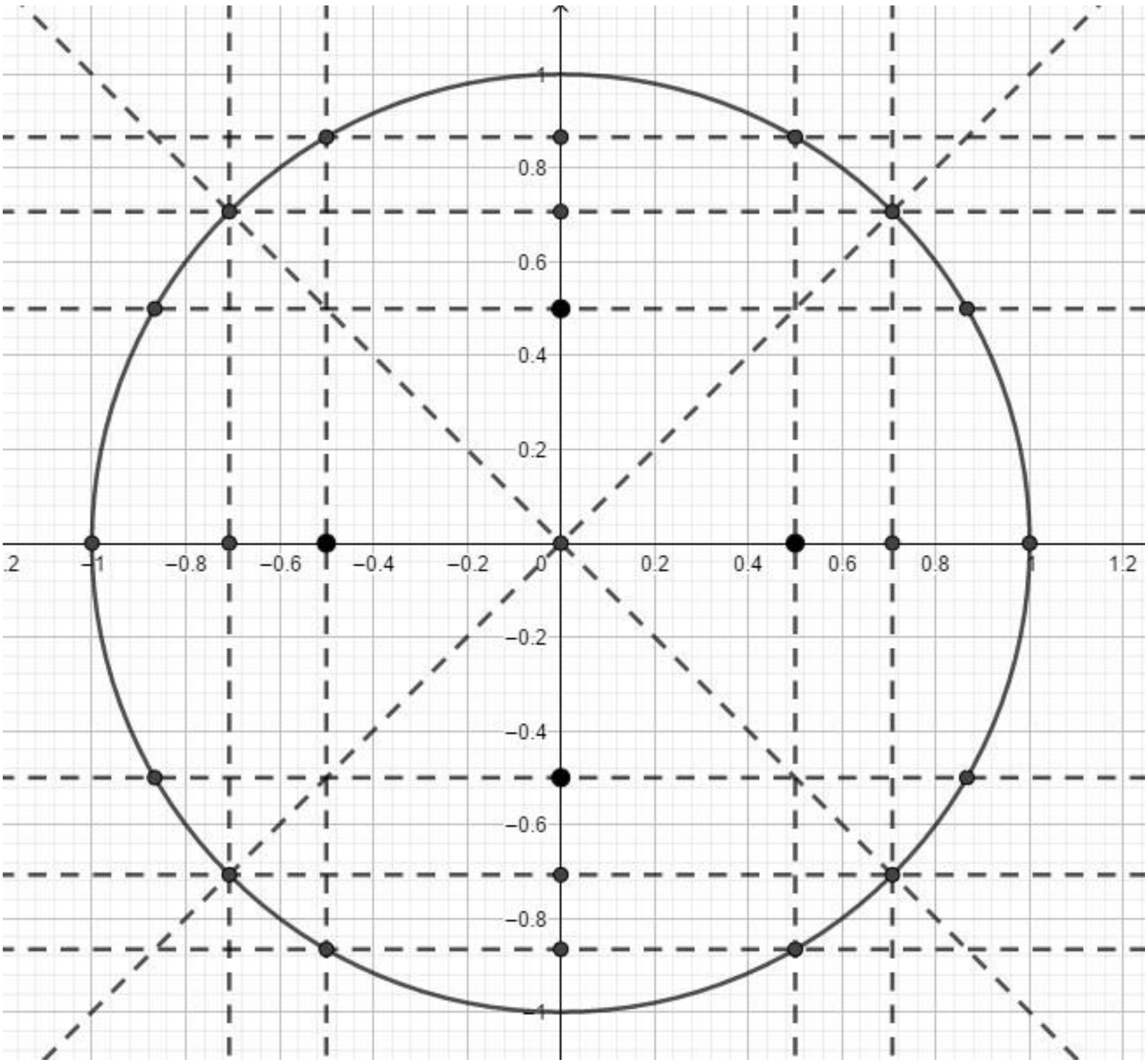
Option Mathématiques expertes Terminale	**Nombres complexes (2) :** *Module et argument*	2024/2025

I) Rappels de trigonométrie de spé Première :

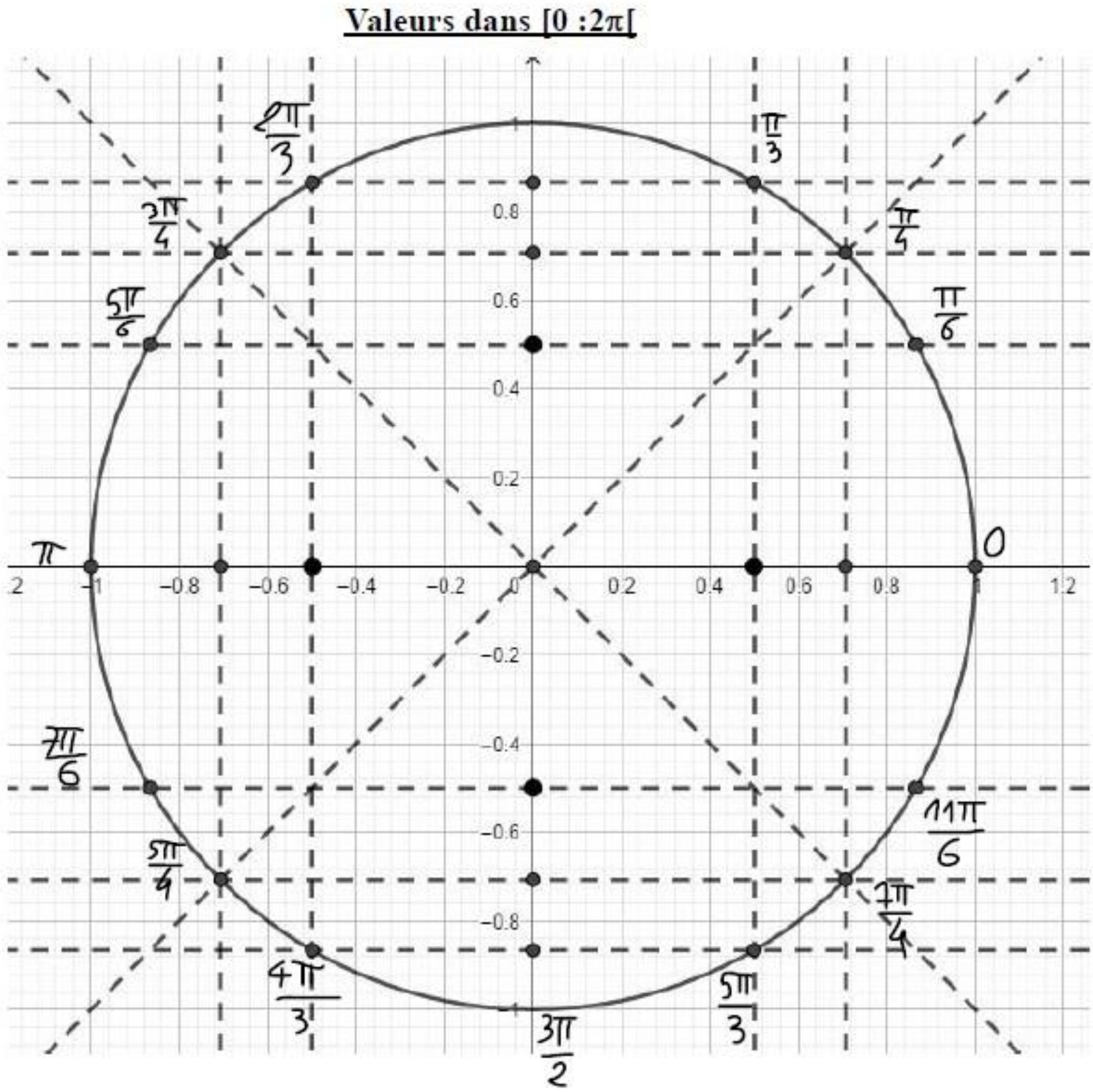
Fiche de révision

Remarque : Il faut bien connaître le tableau des valeurs remarquables.

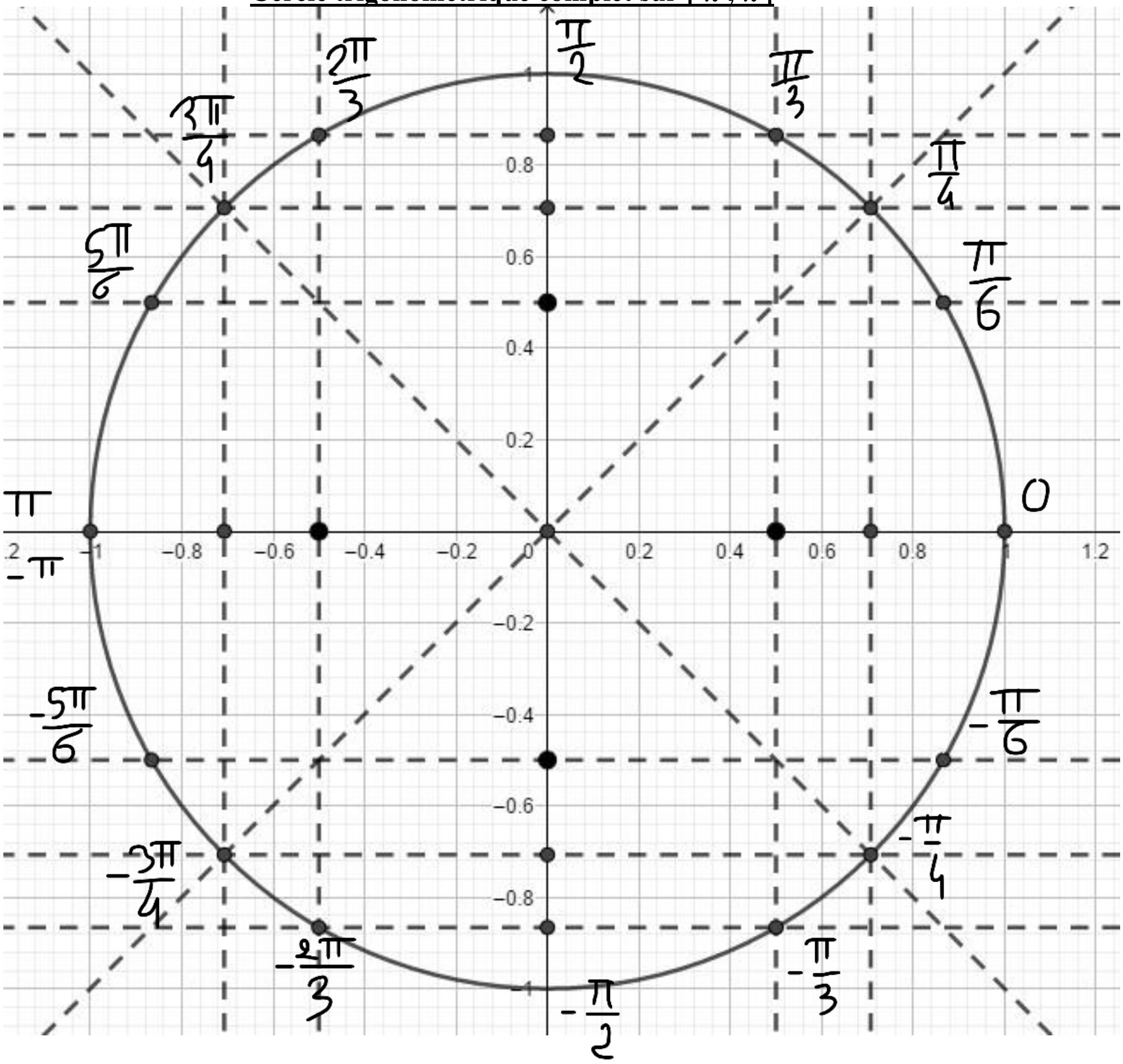
Cercle trigonométrique (vierge)



Cercle trigonométrique complet sur [0 ;2π[



Cercle trigonométrique complet sur]-π ; π]



Remarque :

L'unique mesure en radians d'un angle contenue dans]-π ;π] est appelée **la mesure principale** de cet angle

Voir le cours de spécialité Première

1) Quelques formules « utiles » :

2) Résolution d'équations trigonométriques :

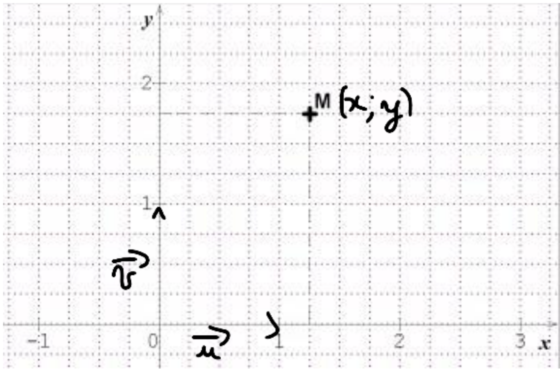
3) Résolution d'inéquations trigonométriques :

II) Module d'un nombre complexe non-nul :

1) Affixe d'un point du plan complexe :

Rappel : Soit $z \in \mathbb{C}$, z admet une écriture unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont réels avec $i^2 = -1$. Cette notation est appelée **écriture algébrique du complexe z**

On se place dans un repère orthonormé du plan : (O ;$\vec{u}$,$\vec{v}$)



A chaque point M(x ;y) du plan, on va associer un unique nombre complexe z.

Définition : Ce nombre est appelé **l'affixe du point M**

Exemples :

Soit A(5 ;-6). Alors A a pour affixe $z_A = 5 - 6i$

Cas particulier : Affixe du milieu d'un segment

Soient A(z_A) et B(z_B) et M, le milieu de [AB], alors :

$$\boxed{z_M = \frac{z_A + z_B}{2}}$$

Démonstration : Facile en posant $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$

2) Affixe d'un vecteur :

a) Définition :

Soient a et b, deux réels et $\vec{w}\binom{a}{b}$ dans un repère (O ;$\vec{u}$,$\vec{v}$) du plan complexe.

On peut associer à $\vec{w}$ l'unique nombre complexe z = a + ib.

Ce nombre est appelé affixe du vecteur $\vec{w}$

b) Calcul de l'affixe d'un vecteur :

Soient A(z_A) et B(z_B). Quel est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

En coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}, \text{ d'où : } z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$$

$$= x_B + iy_B - (x_A + iy_A)$$

$$= z_B - z_A$$

Donc :

$$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$$

Exemple :

Rappel : *Toute relation entre vecteurs se traduit par la même relation sur les coordonnées*

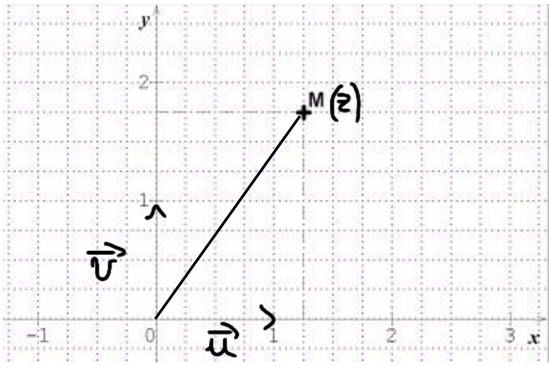
Exemple : Si $\vec{w} = 3\vec{u} - 5\vec{v}$, alors :

$$\begin{cases} x_{\vec{w}} = 3x_{\vec{u}} - 5x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{w}} = 3y_{\vec{u}} - 5y_{\vec{v}} \end{cases}$$

Il y a la même propriété sur les affixes.

3) Module d'un nombre complexe non-nul :

On va se placer dans un repère orthonormé du plan complexe



a) Définition et notation :

Soit z∈ ℂ.

Le module du nombre complexe non-nul z, noté |z| est égal à la distance OM

Exemple :

Soit A(z_A = 2 + 3i) c'est-à-dire A(2 ;3)

|zA| = OA

Rappel : Dans un repère orthonormé, OA = $\sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$

On a OA = $\sqrt{2^2 + 3^2}$ = $\sqrt{13}$ = |zA|

b) Formule du calcul de |z| :

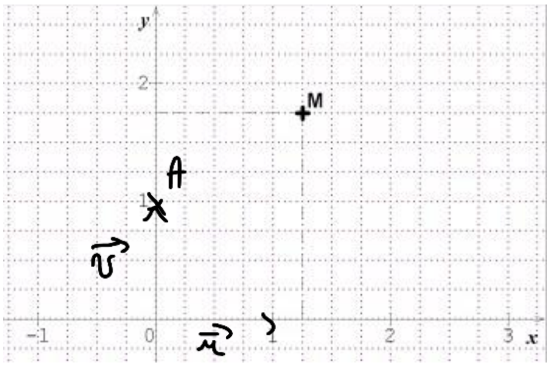
Soit z ∈ ℂ, z = x + iy , où x et y sont deux réels

Alors :

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exemples :

- |i| = $\sqrt{0^2 + 1^2}$ = 1 = OA



- $|\frac{1}{4} - 2i| = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 4} = \sqrt{\frac{65}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

c) <u>Formule liant $|z|$ et $\bar{z}$:</u>

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Alors :

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}}}$$

<u>Démonstration :</u>

On a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, or $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2$

$= x^2 + y^2$

D'où : $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$

<u>Remarque :</u> $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ (ces égalités se démontrent facilement à partir de la définition)

d) <u>Propriétés :</u>

Soient z et z', deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$

(i) $|zz'| = |z| \times |z'|$ *(Autrement dit : <u>Le module d'un produit est égal au produit des modules</u>)*

(ii) On a : $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ *et* $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *(Autrement dit : <u>Le module d'un quotient est égal au quotient des modules</u>)*

(iii) $|z^n| = |z|^n$

(iv) L'inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

<u>Démonstrations :</u>

(i) $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|z'| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

D'où : $|z| \times |z'| = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) \times (x'^2 + y'^2)}$

$$= \sqrt{x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2}$$

D'autre part : $|zz'| = |(x + iy)(x' + iy')| = |xx' - yy' + i(xy' + yx')|$

$$= \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2}$$

$$= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 - \cancel{2xx'yy'} + (xy')^2 + (yx')^2 + \cancel{2xy'yx'}}$$

$$= \sqrt{x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2}$$

Par conséquent : $\underline{|zz'| = |z| \times |z'|}$

Remarque : On pouvait aussi utiliser la formule du c) (plus rapide !)

Pour la (ii) , on procède de même

Pour la (iii), on raisonne par récurrence en utilisant la (i)

La démonstration de la (iv) n'est pas à connaître.

e) Lien entre distance et module :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors :

$$\boxed{AB = |z_B - z_A|}$$

Démonstration :

Rappel : Dans un repère orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Or, $|z_B - z_A| = |x_B + iy_B - (x_A + iy_A)| = |x_B - x_A + i(y_B - y_A)| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Donc : $\underline{AB = |z_B - z_A|}$

Exemple :

Soient $C(3 + 2i)$ et $D(-5-2i)$

On a $CD = |z_D - z_C| = |(-5-2i - 3 - 2i| = |-8 -4i|$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = \underline{4\sqrt{5}}$$

4) Etude de quelques ensembles « classiques » :

On va chercher à déterminer des ensembles de points du plan complexe en utilisant les modules.

a) Premier exemple : Médiatrice d'un segment

Soient $A(3 + 2i)$ et $B(-5-i)$

Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan complexe tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$

On a : $|z - z_A| = MA$ et $|z - z_B| = MB$

D'où : $MA = MB$

L'ensemble cherché est donc **la médiatrice du segment [AB]**

Application :

Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan complexe tel que :

|z -2i + 3| = |z + 5i|

On pose A(-3 + 2i) et B(-5i)

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AB]

b) Deuxième exemple : Cercle

On souhaite déterminer l'ensemble des points M(z) du plan complexe tel que : |z – 5 + 2i| = $\sqrt{2}$

|z – (5 – 2i)| = $\sqrt{2}$

On pose A(5 – 2i).

L'ensemble cherché est l'ensemble des points M du plan complexe tel que : MA = $\sqrt{2}$

C'est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

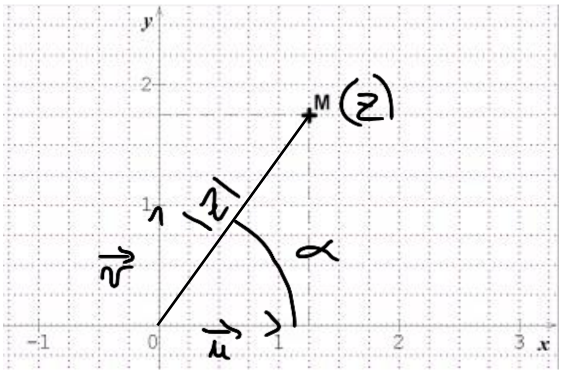
III) Argument d'un nombre complexe non-nul. Notation trigonométrique :

Rappel : *Voir les rappels de trigonométrie de Première*

Tout angle admet une infinité de mesures en radians **mais** une seule dans]-π ;π] appelée la mesure principale de l'angle.

1) Définition :

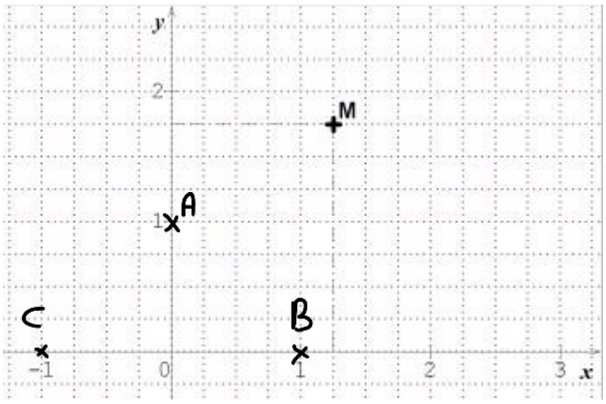
Soit M(z), z ≠ 0



Un argument de z, noté arg(z) est une mesure, en radians, de l'angle ($\vec{u}$;$\overrightarrow{OM}$)

Exemples :

.



A(i) , B(1) et C(-1)

On a arg (i) = $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ, avec k∈ ℤ , arg(1) = 0 + 2kπ, avec k∈ ℤ et arg(-1) = π + 2kπ, avec k∈ ℤ

2) Propriété (admise) :

Soit z ∈ ℂ*, il est alors possible de trouver un réel θ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(z)}{|z|} \end{cases}}$$

Remarque (importante) :

Si nous trouvons une autre valeur réelle θ' vérifiant les deux conditions précédentes, alors il existe un entier k, tel que : **θ' = θ + 2kπ**

Exemples :

a) $z = i = \underbrace{0}_{Re(i)} + \overbrace{1}^{Im(i)} \times i$

On a : |i| = 1 et $\frac{Re(z)}{|z|} = 0$ et $\frac{Im(z)}{|z|} = 1$

Or, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, on peut donc prendre $\theta = \frac{\pi}{2}$

Alors : arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ, avec k ∈ ℤ

Notation : arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ [2π]

b) z = 2 + 2i

$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

On peut trouver un réel θ, tel que : $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$

On a $\cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On peut donc prendre $\theta = \frac{\pi}{4}$, d'où : arg(2 + 2i) = $\frac{\pi}{4}$[2π]

3) Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non-nul :

Soit z = x + iy $\in \mathbb{C}^*$

Il existe au moins un réel θ tel que : $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\text{Re}(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$

On a : z = Re(z) + iIm(z) = |z| ($\frac{\text{Re}(z)}{|z|}$ + i$\frac{\text{Im}(z)}{|z|}$) = |z|(cos(θ) + isin(θ))

Donc : **$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$**

*Cette notation est appelée **écriture trigonométrique** ou **notation trigonométrique** du nombre complexe z.*

Remarque : Pour un nombre complexe z donné, cette notation n'est pas unique (car elle dépend du choix du réel θ)

Exemple :

Soit z = -1 + i .   Re(z) = -1 et Im(z) = 1

On a : $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\frac{\text{Re}(z)}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \cos(\theta)$ et $\frac{\text{Im}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\theta)$

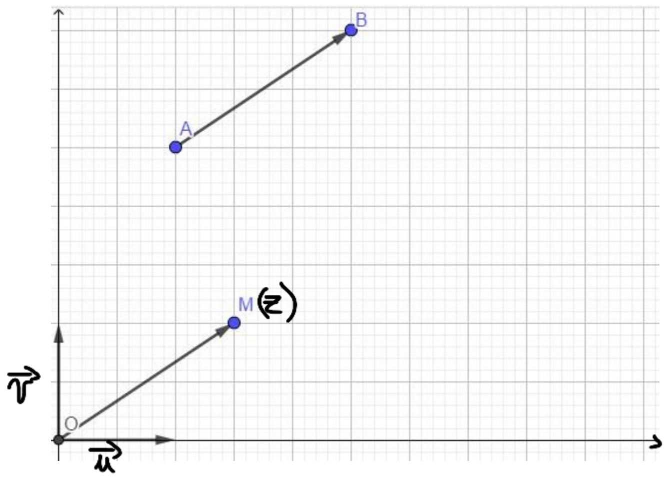
On peut prendre $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Donc : z = **$\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$** (c'est une écriture trigonométrique de -1 + i)

4) Argument et vecteur :

Soient A et B, deux points distincts.

Alors : **$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ [2π]**



On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.   Or, $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$ [2π]

D'où : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z)$ [2π]   avec $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = z_{\overrightarrow{OM}} = z$

D'où le résultat.

5) Premières propriétés :

Soit z, un complexe non-nul :

a) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
b) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
c) $\arg(-\bar{z}) = -\arg(z) + \pi\ [2\pi]$
d) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [2\pi]$
e) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Démonstrations : Par un schéma

6) Propriétés (2) :

Soient z et z', deux nombres complexes non-nuls et n, un entier naturel :

a) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
b) $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
c) $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
d) $\arg(z^n) = n\times\arg(z)\ [2\pi]$

Démonstrations :

Pour les démonstrations, nous admettons les résultats suivants (voir la trigonométrie)

Soient θ et θ', deux réels, alors :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$$
$$\sin(\theta + \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')$$
$$\cos(\theta - \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')$$
$$\sin(\theta - \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta')$$

a) on a : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$

D'où : $zz' = |z| \times |z'|\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times (\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$

$zz' = |zz'|(\cos(\theta)\cos(\theta') + i\cos(\theta)\sin(\theta') + i\sin(\theta)\cos(\theta') - 1\times \sin(\theta)\sin(\theta'))$

$= |zz'|(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))$

$= |zz'|\ (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$

D'où : $\arg(zz') = \theta + \theta'\ [2\pi]$

C'est-à-dire : $\mathbf{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]}$

Remarques :

- Pour démontrer la b), on procède de même
- Pour la c), on utilise l'égalité : $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z \times \frac{1}{z'})\ [2\pi]$ et on conclut à l'aide de a) et b)
- La d) se prouve par récurrence

IV) Forme exponentielle :

1) Définition et notation :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$: il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ (écriture trigonométrique du complexe z)

On pose : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

D'où : $\mathbf{z = |z|e^{i\theta}}$: Cette notation est appelée **<u>écriture exponentielle du complexe z</u>**

<u>Remarque :</u> Un nombre complexe non-nul admet une infinité d'écritures exponentielles

<u>Exemples :</u>

a) $i = 1 \times (\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $z = 2 + 2i$

On a $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

Donc : **<u>$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$</u>**

2) <u>Propriétés :</u>

Soient θ et θ', deux réels et $n \in \mathbb{Z}$:

a) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

b) $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

c) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

d) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

<u>Remarque :</u> Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, ces propriétés ont été démontrées dans la partie consacrée aux arguments.

<u>Exemple 1 :</u>

Soient $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Déterminer une notation exponentielle du complexe : $Z = \frac{z_1}{z_2}$

On a $Z = \frac{3e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12})} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$ (notation exponentielle de Z)

<u>Remarque :</u> En identifiant l'écriture algébrique de Z avec une de ses notations exponentielles, on peut en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$ (voir les exercices)

<u>Exemple 2 :</u>

Calculer $(1 + i\sqrt{3})^9$

On a : $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, on peut donc prendre : $\theta = \frac{\pi}{3}$

D'où une écriture exponentielle de z est $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Alors : $z^9 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^9 = 2^9\ (e^{i\frac{\pi}{3}})^9 = 512\ e^{i3\pi}$ (car $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$)

Or, $e^{i3\pi}$ = -1 , donc : **$z^9 = -512$**

3) Formules d'Euler :

Leonhard EULER (1707-1783) (Mathématicien suisse)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array}}$$

Démonstration :

Il suffit d'utiliser : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

On a : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

Or, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

D'où : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$, donc : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

On procède de même pour la deuxième formule.

Application « classique » : linéarisation de puissances de cos et sin

Exemple : Linéariser $\sin^4(x)$ (= c'est-à-dire exprimer $(\sin(x))^4$ sous la forme de cos et sin sans puissances)