Option Maths expertes
T^{ale}

Corrigé du DS sur les matrices (1)

(Fait le 29/01/25)

Exercice (1) :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Méthode (1) :

1) $\det(M) = 3 \times 6 - (-4) \times (-5)$
$= 18 - 20 = -2 \neq 0$, d'où M est inversible

2) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $\det(M) \neq 0$

alors $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

D'où : $M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Methode (2) :

1) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\times 3 + (-5)\times(-4) & 3\times(-5) + (-5)\times 6 \\ -4\times 3 + 6\times(-4) & -4\times(-5) + 6\times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & -45 \\ -36 & 56 \end{pmatrix}$$

d'où : $M^2 - 9M - 2I_2 = \begin{pmatrix} 29 & -45 \\ -36 & 56 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & -45 \\ -36 & 54 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 29-27-2 & -45+45-0 \\ -36+36-0 & 56-54-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Matrice nulle}$$

D'où : $\underline{M^2 - 9M - 2I_2 = 0}$

2) D'après 1) :

$$M(M - 9I_2) = 2I_2$$

$$\Leftrightarrow M \times \underbrace{\frac{1}{2}\left[M - 9I_2\right]}_{=B} = I_2$$

or, $MB = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est inversible} \\ \boxed{\text{et}}\ M^{-1} = B \end{cases}$

Avec $M^{-1} = \dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right]$

Donc $\underline{M\quad\quad} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

<u>Remarque</u> : On retrouve le résultat obtenu avec la méthode 1

<u>Exercice 2 :</u>

$$(S) \begin{cases} 2x - 3y - 5z = -8 \\ -x + y + z = 4 \\ 3x - 2y - 7z = -5 \end{cases}$$

1) On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Alors :

$$(S) \iff AX = B \quad \text{(Traduction matricielle)}$$

2) Avec la calculatrice, on a $\det(A) = 7 \neq 0$

donc A est inversible.

3) $AX = B$ (Comme A est inversible, on peut considérer A^{-1})

$\times A^{-1}$ $\times A^{-1}$ (multiplication à gauche par A^{-1})

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_3}X = A^{-1}B$$

$$\iff X = A^{-1}B$$

4) A l'aide de la calculatrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{7}\times(-8) - \frac{11}{7}\times 4 + \frac{2}{7}\times(-5) = \frac{40}{7} - \frac{44}{7} - \frac{10}{7} = -2 \\ y = -\frac{4}{7}\times(-8) + \frac{1}{7}\times 4 + \frac{3}{7}\times(-5) = \frac{32}{7} + \frac{4}{7} - \frac{15}{7} = 3 \\ z = -\frac{1}{7}\times(-8) - \frac{5}{7}\times 4 - \frac{1}{7}\times(-5) = \frac{8}{7} - \frac{20}{7} + \frac{5}{7} = -1 \end{cases}$$

Donc : $S = \{(-2 ; 3 ; -1)\}$

Exercice 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$n \in \mathbb{N}$

1) $\det P = 1 \times (-2) - 1 \times 1$

$= -2 - 1 = -3 \neq 0$, d'où P est inversible

Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det P \neq 0$

alors $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

d'où : $P^{-1} = -\dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2)
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{3} + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} + \frac{3}{3} \\ \frac{4}{3} - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{3}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{3} + \frac{5}{3} & \frac{10}{3} - \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

3) Montrons par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

* Initialisation : Pour $n=0$

$$D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 5^0 & 0 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

d'où $D^0 = \begin{pmatrix} 5^0 & 0 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix}$: la propriété est initialisée

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

à savoir : $D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$

Nous allons alors la prouver au rang $k+1$:

$$D^{k+1} = D^k \times D = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5^k \times 5 + 0 & 5^k \times 0 + 0 \times 2 \\ 0 \times 5 + 2^k \times 0 & 0 \times 0 + 2^k \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5^{k+1} & 0 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$: la propriété est héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire
Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc : $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) On a : $D = P^{-1} A P$

$\times P$ (multiplication à gauche) $PD = \underbrace{PP^{-1}}_{= I_2} A P = AP$

(Multiplication à droite par P^{-1}) $PDP^{-1} = A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2} = A$

d'où : $A = PDP^{-1}$

Alors : $A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{PD\overbrace{P^{-1} \times P}^{=I_2}D\overbrace{P^{-1} \times P}^{=I_2}D\overbrace{P^{-1} \times \ldots}^{=I_2} \overbrace{\ldots \times P}^{=I_2}DP^{-1}}_{n \text{ facteurs égaux à } PDP^{-1}}$

donc : $\underline{A^n = PD^nP^{-1}}$ (se montre rigoureusement par récurrence).

5) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5^n & 2^n \\ 5^n & -2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\times 5^n + \frac{1}{3}\times 2^n & \frac{1}{3}\times 5^n - \frac{1}{3}\times 2^n \\ \frac{2}{3}\times 5^n - \frac{1}{3}\times 2^{n+1} & \frac{1}{3}\times 5^n + \frac{1}{3}\times 2^{n+1} \end{pmatrix}$

Donc : $\underline{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\times 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2\times 5^n - 2^{n+1} & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}}$

<u>Remarque</u> : $\begin{cases} \cdot \text{ pour } n=0, \text{ on retrouve } I_2 \\ \cdot \text{ pour } n=1, \text{ on retrouve } A. \end{cases}$