Option Mathématiques expertes (T^{ale})

Corrigé du DS n° 3
Congruences et divisibilité

(Fait le 11/12/24)

1

Exercice 1 :

1) Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$: (2)

$$\underline{a \equiv b\ [n] \iff n \mid a-b}$$

2) (1) $a \equiv b\ [n] \iff n \mid a-b$

et $c \equiv d\ [n] \iff n \mid c-d$ (1)

d'où n divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $a-b$ et $c-d$ (1)

En particulier : $n \mid \underbrace{c\times(a-b)+b\times(c-d)}_{}$ (1)

$$= ac - \cancel{bc} + \cancel{bc} - bd = ac - bd$$

D'après le théorème énoncé en 1),

$$\underline{ac \equiv bd\ [n]}$$

Exercice 2 :

1) $2024-(-1) = 2024+1 = 2025$ et $2025 = 25\times 81$ c'est-à-dire : $25 \mid 2024-(-1)$

$$\iff \underline{2024 \equiv -1\ [25]}$$

2) Par passage à la puissance $2025 > 0$ et impair :

$$2024^{2025} \equiv -1\ [25]$$
$$\equiv 24\ [25],\ \text{avec } 0 \leq 24 < 25$$

Donc : <u>24 est le reste dans la division euclidienne de 2024^{2025} par 25</u>

Exercice 3 :

1) $3^4 = 81 = 10\times 8 + 1$, avec $0 \leq 1 < 10$

D'où : $\underline{3^4 \equiv 1\ [10]}$

2) D'après 1), par passage à la puissance n positive :

$$3^{4n} \equiv 1 [10] \text{, pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On a : $3^{4n+2} = 3^{4n} \times 3^2 = 3^{4n} \times 9$

D'où par produit :

$$3^{4n+2} = 3^{4n} \times 9 \equiv 9 \times 1 [10]$$

Donc : $\underline{3^{4n+2} \equiv 9 [10]}$

or, $0 \leq 9 < 10$

Par conséquent : <u>le chiffre des unités de 3^{4n+2} est 9</u>

<u>pour tout $n \in \mathbb{N}$</u>

<u>Exercice 4</u> :

$$(E) : x^2 + 2x - 4 \equiv 0 [5]$$

1) <u>Tableau des restes modulo 5 :</u>

$x \equiv \ldots$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ldots$	0	1	4	4	1
$2x \equiv \ldots$	0	2	4	1	3
$2x-4 \equiv \ldots$	1	3	0	2	4
$x^2+2x-4 \equiv \ldots$	1	4	4	1	0

3) $x^2 + 2x - 4 \equiv 0 [5] \iff x \equiv 4 [5]$

$\iff 5 \mid x - 4$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - 4 = 5k$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = 5k + 4$

Donc : $\underline{S = \{5k+4, k \in \mathbb{Z}\}}$

<u>Exercice 5</u> :

1) $10 - 1 = 9$ et $9 \mid 9$, c'est-à-dire : $9 \mid 10 - 1$

$\iff \underline{10 \equiv 1 [9]}$

2) Par passage à la puissance $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv 1 [9]$.

D'où, par produits et par somme :

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
$$\equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \; [9]$$

c'est-à-dire :

$$\underline{x \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \; [9]}$$

3) x est divisible par $9 \iff x \equiv 0 \; [9]$

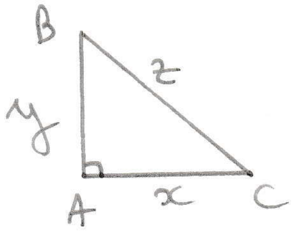
4) Par transitivité de la relation de congruence,

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 \; [9]$$

c'est-à-dire : $9 \mid a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$

Par conséquent : <u>La somme des chiffres de x est un multiple de 9</u>

Exercice 6 :



Le triangle ABC est rectangle en A :
D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$\iff z^2 = y^2 + x^2$$

Tableaux de restes modulo 5 :

$x \equiv \dots$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots$	0	1	4	4	1

$y^2 \backslash x^2$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	0
4	4	0	3

on a $z^2 = x^2 + y^2$

D'après ces deux tableaux : il n'y a que 7 cas possibles.

1. $x^2 \equiv 0 [5]$ et $y^2 \equiv 0 [5]$, d'où $x \equiv 0 [5]$ et $y \equiv 0 [5]$
2. $x^2 \equiv 0 [5]$ et $y^2 \equiv 1 [5]$, d'où $x \equiv 0 [5]$
3. $x^2 \equiv 0 [5]$ et $y^2 \equiv 4 [5]$, d'où $x \equiv 0 [5]$
4. $x^2 \equiv 1 [5]$ et $y^2 \equiv 0 [5]$, d'où $y \equiv 0 [5]$
5. $x^2 \equiv 1 [5]$ et $y^2 \equiv 4 [5]$, d'où $z^2 \equiv 0 [5] \iff z \equiv 0 [5]$
6. $x^2 \equiv 4 [5]$ et $y^2 \equiv 0 [5]$, d'où $y \equiv 0 [5]$
7. $x^2 \equiv 4 [5]$ et $y^2 \equiv 1 [5]$, d'où $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 0 [5] \iff z \equiv 0 [5]$

Conclusion

Dans tous les cas, soit x, soit y, soit z est un multiple de 5