

Exercice 1: ~~5,5~~

$$(x; y) \in \mathbb{N}^2, 9x^2 - 4y^2 = 65$$

$$\Leftrightarrow (3x)^2 - (2y)^2 = 65$$

$$\Leftrightarrow (3x+2y)(3x-2y) = 65$$

(1)

comme $(x; y) \in \mathbb{N}^2$, $3x+2y \geq 3x-2y$

Diviseurs de 65 dans $\mathbb{N}$ = $\{1; 5; 13; 65\}$ (1)

On raisonne par disjonction de cas: (0,5)

1^{er} cas:
$$\begin{cases} 3x+2y = 65 & (1) \\ 3x-2y = 1 & (2) \end{cases} \leftarrow (1)+(2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y = 65 \\ 6x = 66 \Leftrightarrow x = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{65-3x}{2} = \frac{65-3 \times 11}{2} = \frac{32}{2} = 16 \in \mathbb{N} \\ x = 11 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(2)

2^{ème} cas:
$$\begin{cases} 3x+2y = 13 & (1) \\ 3x-2y = 5 & (2) \end{cases} \leftarrow (1)+(2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y = 13 \\ 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13-3x}{2} = \frac{13-9}{2} = 2 \in \mathbb{N} \\ x = 3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Donc: $S = \{(11; 16), (3; 2)\}$ (1)

(2)

Exercice (2): ~~3,5~~
 $n \in \mathbb{N}$, $3n+4 \mid 9n-7$

$3n+4 \mid 3n+4$ et $3n+4 \mid 9n-7$, d'où $3n+4$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $3n+4$ et $9n-7$. (1)

En particulier, $3n+4 \mid \underbrace{3 \times (3n+4) - 1 \times (9n-7)}_{= 19}$ (1)

or, les diviseurs de 19 dans $\mathbb{N}$ sont:

$\{1; 19\}$ (1)

Par disjonction de cas: (0,5)

(1) $3n+4 = 1 \Leftrightarrow 3n = -3 \Leftrightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$

(2) $3n+4 = 19 \Leftrightarrow 3n = 15 \Leftrightarrow n = 5 \in \mathbb{N}$ (1)

Donc: $S = \{5\}$

Exercice (3): ~~2~~

$3n+17 = 3(n+4)+5$ est la relation de division euclidienne de $3n+17$ par $n+4$ si et seulement si:

$0 \leq 5 < n+4$

$\Leftrightarrow 1 < n$

$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

2

Exercice (4): 3

(3)

$$-495 = -19 \times 25 - 20$$

$$= -25 \times 19 - 20$$

$$= 19 \times (-25) - 19 + 19 - 20$$

$$= 19(-26) - 1$$

$$= 19(-26) - \underbrace{1 + 19}_{=18} - 19$$

$$= 19(-27) + 18, \text{ avec } 0 \leq 18 < 19$$

Donc: $r = 18$

Exercice (5): Bonus.

Soit n : le nombre cherché

$$n = 234q + 51, \quad q \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } n = 223q + 117, \quad q \in \mathbb{N}$$

(+2)

$$\text{d'où: } 234q + 51 = 223q + 117$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(234 - 223)}_{11} q = 117 - 51 = 66$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{66}{11} = 6$$

$$\text{d'où: } n = 234 \times 6 + 51 = \underline{1455} \text{ c'est le code cherché}$$