Option Maths expertes
Tale

Corrigé du devoir n° 1

Exercice 1 :

$(z, z') \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}$

1) a) Binôme de Newton : $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$

et sous forme développée :

$$(z+z')^n = \binom{n}{0} z^0 z'^n + \binom{n}{1} z^1 z'^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} z^{n-1} z'^1 + \binom{n}{n} z^n z'^0$$

b) $$(2+i\sqrt{2})^4 = \binom{4}{0} 2^0 \times (i\sqrt{2})^{4-0} + \binom{4}{1} 2^1 \times (i\sqrt{2})^{4-1} + \binom{4}{2} 2^2 \times (i\sqrt{2})^{4-2} + \binom{4}{3} 2^3 \times (i\sqrt{2})^{4-3} + \binom{4}{4} 2^4 \times (i\sqrt{2})^{4-4}$$

(d'après le binôme de Newton)

Rque : On peut utiliser la calculatrice pour obtenir les différents coefficients binomiaux.
ou avec les formules :

$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1$ $\quad$ $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{\cancel{3!} \times 4}{\cancel{3!}} = 4$

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{\cancel{1 \times 2} \times 3 \times 4}{\cancel{1 \times 2} \times 1 \times 2} = \frac{3 \times \cancel{2} \times 2}{\cancel{2}} = 6$

$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{\cancel{3!} \times 4}{\cancel{3!}} = 4$ $\quad$ $\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$

Donc :

$$(2+i\sqrt{2})^4 = 1 \times \underbrace{i^4}_{=1} (\sqrt{2})^4 + 4 \times 2 \times i^3 (\sqrt{2})^3 + 6 \times 4 \times i^2 \times (\sqrt{2})^2 + 4 \times 8 \times i \times \sqrt{2} + 1 \times 16$$

$$= \underline{4} - \underline{8i \times 2\sqrt{2}} - \underline{24 \times 2} + \underline{32i\sqrt{2}} + \underline{16}$$

Donc : $\underline{(2+i\sqrt{2})^4 = -28 + 16i\sqrt{2}}$

2) Soit $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$

On a : $\overline{z} = x - iy$ et $\overline{z'} = x' - iy'$

$\overline{z} \times \overline{z'} = (x - iy) \times (x' - iy')$

$= xx' - ixy' - iyx' + i^2 yy'$

d'où : $\overline{z} \times \overline{z'} = xx' - yy' + i(-xy' - yx')$

D'autre part : $z \times z' = (x + iy) \times (x' + iy')$

$= xx' + ixy' + iyx' - yy'$

$= xx' - yy' + i(xy' + yx')$

d'où : $\overline{z \times z'} = xx' - yy' + i(-xy' - yx')$

Donc : $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Exercice 2 :

$$z = \frac{3+4i}{2-7i} = \frac{(3+4i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}$$

$$= \frac{6 + 21i + 8i - 28}{4 + 49}$$

$$= \frac{-22 + 29i}{53} = -\frac{22}{53} + \frac{29}{53} i$$

D'où : $\overline{z} = \overline{-\frac{22}{53} + \frac{29}{53} i} = -\frac{22}{53} - \frac{29}{53} i$

Exercice 3 :

1) $P(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 + \frac{29}{4} \times 3 - \frac{123}{4}$

$= 54 - 45 + \frac{87}{4} - \frac{123}{4} = 9 - \frac{36}{4} = 9 - 9 = 0$

D'où 3 est une racine de P

2) Comme 3 est racine de P, P est factorisable par $z - 3$

$(z-3)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 3az^2 - 3bz - 3c$

$= az^3 + z^2(b - 3a) + z(c - 3b) - 3c$

On procède par identification des coefficients de même degré :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -5 \\ c - 3b = \frac{29}{4} \\ -3c = -\frac{123}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 + 3a = -5 + 6 = 1 \\ \frac{41}{4} - \frac{12}{4} = \frac{29}{4} \text{ (cohérent)} \\ c = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3} \times 41}{4} = \frac{41}{4} \end{cases}$$

Donc : $\underline{P(z) = (z-3)\left(2z^2 + z + \frac{41}{4}\right)}$

3) $P(z) = 0 \iff z - 3 = 0$ ou $2z^2 + z + \frac{41}{4} = 0$

$\iff z = 3$ ou $2z^2 + z + \frac{41}{4} = 0$ $\quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \frac{41}{4} \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - \cancel{4} \times 2 \times \frac{41}{\cancel{4}} = 1 - 82 = -81 < 0$: d'où l'équation admet deux racines complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 9i}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4}i$

et $z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{4} - \frac{9}{4}i$

Donc : $\underline{S = \left\{3 ; -\frac{1}{4} + \frac{9}{4}i ; -\frac{1}{4} - \frac{9}{4}i\right\}}$