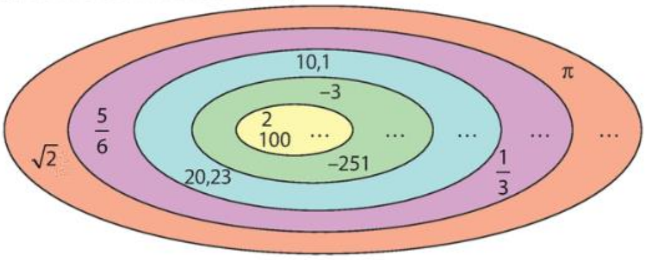
Option Maths Expertes (M Mangeard)	**Introduction au chapitre I** *(Nombres complexes : point de vue algébrique)*	Année scolaire 2023/2024

Activité 1 :

1 Faire le point sur les ensembles de nombres

1. Recopier et compléter le schéma ci-dessous, en déterminant l'ensemble de nombres correspondant (par exemple on notera $\mathbb{R}$ pour l'ensemble des réels).



2. On considère l'équation suivante : $x + 3 = 2$.

a) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers naturels.

b) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers relatifs.

3. On considère l'équation suivante : $2x + 1 = 0$.

a) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers naturels.

b) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers relatifs.

c) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des réels.

4. On considère l'équation $x^2 + 1 = 0$.
Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des réels.

Activité 2 : Introduction historique

2 Découvrir une approche historique

On veut trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit soit égal à 40.


Cardan

Au milieu du XVI^e siècle, Cardan donne des solutions de l'équation correspondant à ce problème : $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.
Il nomme ces quantités « quantités sophistiquées ».
Plus tard, au XVII^e siècle, Descartes les nommera « quantités imaginaires ».
Au XVIII^e siècle, Euler introduit une nouvelle notation : il pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.

1. Montrer que le problème peut se traduire par l'équation $x \times (10 - x) = 40$.

2. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

3. En admettant que les quantités $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ de Cardan existent, montrer qu'elles vérifient bien l'équation. Pour cette question, on généralise la règle suivante à tous les nombres réels : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

4. On pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.

a) En déduire que i est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

b) Déterminer la valeur de i^4.

5. En utilisant le nombre i, déterminer un nombre qui :

a) élevé au carré est égal à -4. **b)** élevé au carré est égal à -2. **c)** élevé au carré est égal à -15.

6. En utilisant le résultat de la question **5. c)**, réécrire les solutions proposées par Cardan en utilisant le nombre i.