Option Maths Expertes (M Mangeard)	Chapitre I : Nombres complexes (Partie I : Point de vue algébrique)	Année scolaire 2023/2024
--	---	-----------------------------

Introduction :

- 1) Rappels sur les ensembles de nombres
- 2) Les nombres complexes : Introduction historique

I) Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **corps des nombres complexes** et qui vérifie les points suivants :

-
-
-
-

1) Forme algébrique :

- a) L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z = \dots\dots\dots$, où x et y sont deux nombres réels et i est le complexe tel que $i^2 = -1$ est appelée **forme algébrique** ou **écriture algébrique** du nombre complexe z .

Le nombre x est appelé la partie réelle du complexe z et y sa partie imaginaire.

La partie réelle de z se note $\text{Re}(z)$ et sa partie imaginaire $\text{Im}(z)$

Cas particuliers :

- Si $\text{Re}(z) = 0$, alors z est dit (notation :))
- Si $\text{Im}(z) = 0$, alors z est (notation :)) (*c'est pourquoi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: les réels sont des nombres complexes particuliers*)

- b) Unicité de la forme algébrique :

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

Démonstration :

Exemples :

- Le nombre i peut s'écrire $0 + 1 \times i$, d'où : $\text{Re}(i) = 0$ et $\text{Im}(i) = 1$
- Si $z = 6i - 5$, alors $\text{Re}(z) = -5$ et $\text{Im}(z) = 6$

- c) Egalité de deux nombres complexes :

Soient z et z' , deux nombres complexes, alors :

$$z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

Démonstration :

2) Opérations dans $\mathbb{C}$ et principales propriétés :

Soient z et z' , deux nombres complexes tels que : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y, y' sont quatre réels. Alors :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \quad z - z' = (x - x') + i(y - y') \quad z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Remarques :

- La dernière formule n'est pas à apprendre par cœur. Ce résultat se retrouve facilement dans chaque situation.
- Lorsqu'on effectue des calculs avec des nombres complexes écrits sous forme algébrique, on notera (pour l'instant) le résultat sous forme algébrique aussi.
- Les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ s'étendent à l'ensemble $\mathbb{C}$. Il en est de même pour la distributivité de la multiplication sur l'addition.
- Dans les calculs, ne pas oublier que $i^2 = -1$

Exemples :

Si $z = 3 + 2i$ et $z' = -5 - 7i$, alors :

$$\begin{aligned} z + z' &= & z - z' &= \\ &= & &= \\ &= & &= \end{aligned}$$

$$z \times z' = (3 + 2i) \times (-5 - 7i)$$

Pour effectuer ce calcul, on va utiliser la double distributivité (comme dans $\mathbb{R}$)

$$z \times z' =$$

3) Conjugué :

a) Définition :

Le conjugué d'un nombre complexe z est le complexe noté $\bar{z}$ ayant la même partie réelle que celle de z , mais une partie imaginaire opposée à celle de z .

Autrement dit : si $z = x + iy$, alors $\bar{z} = x - iy$

Exemple :

Si $z = \frac{3}{4} + 8i$, alors $\bar{z} = \dots\dots\dots$

b) Quelques propriétés algébriques du conjugué :

- i) $\overline{\bar{z}} = z$ ii) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ iii) $z - \bar{z} = 2i \times \text{Im}(z)$ iv) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ (déjà vue)
v) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ vi) $z \times \bar{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$

Démonstrations :

Remarque : Les propriétés iv) et v) serviront à déterminer des ensembles géométriques du plan

c) Opérations et conjugaison :

Soient z et z' , deux nombres complexes et n un entier naturel :

- i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ii) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ iii) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Démonstrations :

4) Inverse et quotient :

a) Définitions et notations :

- Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. z admet un unique inverse noté $\frac{1}{z}$ tel que : $z \times \frac{1}{z} = 1$

- Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, alors le quotient de z par z' , noté $\frac{z}{z'}$, est défini par : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

Méthode importante :

Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient de nombres complexes, on multipliera le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple :

Déterminer la forme algébrique du quotient suivant :

$$A = \frac{3+2i}{5-i}$$

b) Quotients et conjugués :

Soient z et z' , deux complexes tels que $z' \neq 0$, alors :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Démonstration :

Exemple :

Déterminer la forme algébrique du complexe suivant :

$$B = \overline{\left(\frac{4i+7}{2i+3}\right)}$$

II) Equations du second degré :

Pré requis : On suppose bien sûr connue la résolution des équations du second degré de la classe de première ainsi que les notations utilisées.

On considère trois nombres **réels** a , b et c , tels que $a \neq 0$.

Notons (E), l'équation suivante : $az^2 + bz + c = 0$, où z est un nombre complexe.

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation (E)

Alors :

1) Si $\Delta = 0$: (E) admet une seule solution réelle notée z_0 avec $z_0 = -\frac{b}{2a}$

2) Si $\Delta > 0$: (E) admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ATTENTION :

3) Si $\Delta < 0$: (E) admet deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple :

Résoudre l'équation suivante : $z^2 + z + 1 = 0$

III) Binôme de Newton. Premières applications :

Isaac Newton (1642-1727) : Mathématicien, physicien, philosophe, etc...

1) Formule :

Soient z et z' , deux nombres complexes et n , un entier naturel, alors :

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

Démonstration :

2) Applications :

IV) **Factorisations et racines de fonctions polynômes :**