NOM :…….Prénom :…….. ;

Option maths expertes (M Mangeard)	**Devoir de mathématiques :** *Divisibilité / Congruences*	Vendredi 12 janvier 2024

- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE : **/20**

Exercice 1 : Cours

Soient x,y,z et t, quatre entiers et n, un entier naturel non nul :

On suppose que $x \equiv y\ [n]$ et $z \equiv t\ [n]$.

Montrer soigneusement que : $xz \equiv yt\ [n]$

(on suppose connue l'équivalence suivante : $a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow n \mid a - b$)

Exercice 2 :

On souhaite résoudre l'équation (E) : $x^2 + 5x \equiv 0\ [8]$, pour x entier

1) Compléter, sans justifier, le tableau suivant de restes modulo 8 :

$x \equiv \ldots [8]$								
$x^2 \equiv \ldots [8]$								
$5x \equiv \ldots [8]$								
$x^2 + 5x \equiv \ldots [8]$								

2) En déduire soigneusement la résolution de (E)

Exercice 3 :

1) Montrer en justifiant que $7^4 \equiv 1\ [10]$
2) En déduire le chiffre des unités du nombre 7^{2024}

Exercice 4 :

1) Montrer que $2024 \equiv 8\ [9]$
2) Déterminer alors en justifiant le reste dans la division euclidienne de 2024^{2023} par 9

Exercice 5 : Critère de divisibilité par 4

1) Montrer que $10^2 \equiv 0\ [4]$
2) Soit x, un entier.

   Montrer que $x \equiv a_0 + 10a_1[4]$, où a_0 et a_1 sont respectivement le chiffre des unités et celui des dizaines du nombre entier x.
3) En déduire un critère simple de divisibilité par 4