

Option Mathématiques expertes (M Mangeard)	<u>Corrigé du devoir de</u> <u>mathématiques :</u> <i>Matrices</i>	Fait le vendredi 9 février 2024
---	--	------------------------------------

Exercice 1 :

On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et n , un entier naturel

Déterminer explicitement D^n en justifiant soigneusement.

Démontrons par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$

* Initialisation: $D^0 = I_3$ or, $(-2)^0 = 1 = 5^0 = 1^0$
 D'où: $D^0 = \begin{pmatrix} (-2)^0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^0 \end{pmatrix}$

* Hérédité: On suppose la propriété vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$
 c'est-à-dire: $D^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix}$

Montrons-la au rang $k+1$:

$$\begin{aligned} D^{k+1} &= D^k \times D = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^k \times (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 5^k \times 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire

* Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 : (Sans calculatrice)

Soit la matrice $F = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que F est inversible en justifiant soigneusement

$\det F = -3 \times 2 - (-1) \times 1 = -6 + 1 = -5 \neq 0$, d'où F est inversible

2) Déterminer F^{-1} en détaillant les calculs

Si $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $\det F \neq 0$

alors F est inversible et $F^{-1} = \frac{1}{\det F} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

NOM : Prénom :

Exercice 3 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$

$$\text{On a : } A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (= \text{la matrice nulle})$$

à la calculatrice

2) En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}

$$\text{D'après 1), } A^2 - 3A + 2I_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 3A = -2I_3$$

$$\Leftrightarrow A \times [A - 3I_3] = -2I_3$$

$$\Leftrightarrow A \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)[A - 3I_3]}_{= B} = I_3$$

$$\text{D'où : } A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I_3)$$
$$= -\frac{1}{2} \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right)$$
$$= -\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

On considère le système 3x3 suivant :

$$(S) \begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$$

1) On appelle A la matrice du système (S). Déterminer explicitement la matrice A

$$\text{On a : } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

3) Calculer $\det(A)$ à la calculatrice. Que peut-on en déduire ? Faire une phrase.

$$\text{A la calculatrice : } \det(A) = 6 \neq 0, \text{ d'où } A \text{ est inversible}$$

3) Si on note X, la matrice-colonne des inconnues, et B la matrice-colonne des seconds membres

Montrer en justifiant que $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$AX = B \quad \text{Comme } A \text{ est inversible, on multiplie à gauche par } A^{-1}$$
$$\text{D'où : } \underbrace{A^{-1} \times A}_{= I_3} X = A^{-1} B, \text{ donc } \underline{X = A^{-1} B}$$

NOM : Prénom :

4) Finir la résolution de (S)

D'après 3), $X = A^{-1} B$

$$\text{d'où : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\text{à la calculatrice})$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{à la calculatrice})$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad S = \underline{\underline{\{ (2; 1; -1) \}}}$$