Option maths expertes (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Divisibilité / Congruences*	Fait le vendredi 12 janvier 2024

Exercice 1 : Cours

Soient x,y,z et t, quatre entiers et n, un entier naturel non nul :

On suppose que $x \equiv y\ [n]$ et $z \equiv t\ [n]$.

Montrer soigneusement que : $xz \equiv yt\ [n]$

(on suppose connue l'équivalence suivante : $a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow n \mid a - b$)

Comme $x \equiv y\ [n]$, on a $n \mid x - y$, et comme $z \equiv t\ [n]$, alors $n \mid z - t$

Alors n divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $x - y$ et de $z - t$

En particulier, $n \mid z(x - y) + y(z - t) = zx - zy + yz - yt = xz - yt$

C'est-à-dire : $xz \equiv yt\ [n]$

Exercice 2 :

On souhaite résoudre l'équation (E) : $x^2 + 5x \equiv 0\ [8]$, pour x entier

1) Compléter, sans justifier, le tableau suivant de restes modulo 8 :

$x \equiv \ldots [8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \equiv \ldots [8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$5x \equiv \ldots [8]$	0	5	2	7	4	1	6	3
$x^2 + 5x \equiv \ldots [8]$	0	6	6	0	4	2	2	4

2) En déduire soigneusement la résolution de (E)

$x^2 + 5x \equiv 0\ [8]$, pour $x \equiv 0\ [8]$ ou pour $x \equiv 3\ [8]$

Or, $x \equiv 0\ [8] \Leftrightarrow 8 \mid x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 8k$

Et $x \equiv 3\ [8] \Leftrightarrow 8 \mid x - 3 \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x - 3 = 8k' \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x = 8k' + 3$

Donc les solutions de l'équation (E) sont données par : **$S = \{8k\ ;\ 8k + 3,\ \text{pour } k \in \mathbb{Z}\}$**

Exercice 3 :

1) Montrer en justifiant que $7^4 \equiv 1\ [10]$

$7^4 - 1 = 2\,400$, or $10 \mid 2\,400 = 7^4 - 1$, d'où : $7^4 \equiv 1\ [10]$

2) En déduire le chiffre des unités du nombre 7^{2024}

$2024 = 4 \times 506$, d'où : $7^{2024} = 7^{4 \times 506} = (7^4)^{506}$

Or, d'après 1) $7^4 \equiv 1\ [10]$, et par passage à la puissance, $(7^4)^{506} \equiv 1^{506}\ [10]$

C'est-à-dire : $7^{2024} \equiv 1\ [10]$,

Autrement dit : **Le chiffre des unités de 7^{2024} est 1**

Exercice 4 :

1) Montrer que $2024 \equiv 8\ [9]$

On a $2024 = 9 \times 224 + 8$, avec $0 \leq 8 < 9$

Donc : **$2024 \equiv 8\ [9]$**

2) Déterminer alors en justifiant le reste dans la division euclidienne de 2024^{2023} par 9

$8 \equiv 8\ [9]$, $8^2 \equiv 64\ [9]$

$\equiv 1\ [9]$

Or : $8^{2023} = 8^{2\times 1011 + 1} = (8^2)^{1011} \times 8$

Par passage à la puissance : $(8^2)^{1011} \equiv 1^{1011}\ [9]$

$\equiv 1\ [9]$

D'où par produit, $(8^2)^{1011} \times 8 \equiv 8\ [9]$

Par transitivité de la relation de congruence, $2024^{2023} \equiv 8\ [9]$, avec $0 \leq 8 < 9$

Donc : **Le reste dans la division euclidienne de 2024^{2023} par 9 est 8**

Exercice 5 : Critère de divisibilité par 4

1) Montrer que $10^2 \equiv 0\ [4]$

$10^2 = 100 = 4 \times 25 + 0$, avec $0 \leq 0 < 4$

D'où : **$10^2 \equiv 0\ [4]$**

2) Soit x, un entier.

Montrer que $x \equiv a_0 + 10a_1 [4]$, où a_0 et a_1 sont respectivement le chiffre des unités et celui des dizaines du nombre entier x.

Il existe un entier naturel n tel que : $x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$

D'après 1), $10^p \equiv 0\ [4]$, pour tout entier naturel $p \geq 2$, d'où par produit, puis par somme :

$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_2 \times 10^2 \equiv 0\ [4]$, c'est-à-dire : $x \equiv a_1 \times 10 + a_0\ [4]$

Donc : **$x \equiv a_0 + 10a_1 [4]$**

3) En déduire un critère simple de divisibilité par 4

x est divisible par 4 $\Leftrightarrow x \equiv 0\ [4]$, or, d'après 2), $x \equiv a_0 + 10a_1 [4]$

D'où, par transitivité de la relation de congruence, $a_0 + 10a_1 \equiv 0\ [4]$

Autrement dit :

Un entier x est divisible par 4 si le nombre entier formé par ses deux derniers chiffres (= celui des dizaines avec celui des unités) est divisible par 4