Option Mathématiques expertes (M Mangeard)	<u>Corrigé de l'évaluation de mathématiques :</u> <i>Divisibilité / Division euclidienne</i>	Fait le mercredi 22/11/2023
---	--	--------------------------------

Exercice 1 : Cours

Démontrer soigneusement la transitivité de la relation de divisibilité.

Soient a , b et c , trois entiers tels que b et c soient non nuls.

On suppose que $b|a$ et $c|b$

$$b|a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a = b \times k$$

$$c|b \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, b = c \times k'$$

D'où : $a = c \times k' \times k$, avec $k' \times k \in \mathbb{Z}$, d'où : $c|a$. Donc la relation de divisibilité est transitive.

Exercice 2 :

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $3n + 4 | 2n - 1$

$3n + 4 | 2n - 1$ et $3n + 4 | 3n + 4$, d'où $3n + 4$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $2n - 1$ et $3n + 4$

En particulier, $3n + 4 | 3 \times (2n - 1) - 2 \times (3n + 4) = -3 - 8 = -11$

Or, les diviseurs entiers naturels de -11 sont $\{1 ; 11\}$

Par disjonction des cas :

a) $3n + 4 = 1 \Leftrightarrow 3n = -3 \Leftrightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$

b) $3n + 4 = 11 \Leftrightarrow 3n = 7 \Leftrightarrow n = \frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$

Donc : Le problème posé n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$

Exercice 3 :

- 1) Sachant que $1221 = 4 \times 304 + 5$, quel est le reste dans la division euclidienne de 1221 par 4 ? Justifier

Cette égalité $1221 = 4 \times 304 + 5$ ne correspond pas à celle de la division euclidienne de 1221 par 4, car $5 > 4$.

$$1221 = 4 \times 304 + 4 + 1 = 4 \times 305 + 1, \text{ avec } 0 \leq 1 < 4$$

Donc : le reste dans la division euclidienne de 1221 par 4 est 1

- 2) Sachant que $-1038 = -23 \times 45 - 3$,
Quel est le quotient dans la division euclidienne de -1038 par 45 ? Justifier

Cette égalité $-1038 = -23 \times 45 - 3$ ne correspond pas à celle de la division euclidienne de -1038 par 45, car $-3 < 0$.

$$-1038 = -24 \times 45 + 42, \text{ avec } 0 \leq 42 < 45$$

Donc : Le quotient dans la division euclidienne de -1038 par 45 est -24

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = n(2n + 1)(7n + 7)$

1) Montrer que E_n est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$

On raisonne par disjonction des cas :

a) Soit $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$E_n = 2k(2 \times 2k + 1)(7 \times 2k + 7)$$

Avec $k(2 \times 2k + 1)(7 \times 2k + 7) \in \mathbb{N}$, **donc E_n est pair**

b) Soit $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$E_n = (2k + 1)(2 \times (2k + 1) + 1)(7 \times (2k + 1) + 7)$$

$$= (2k + 1)(4k + 3)(14k + 14)$$

$$= (2k + 1)(4k + 3) \times 2 \times (7k + 7) = 2 \times (2k + 1)(4k + 3)(7k + 7)$$

avec $(2k + 1)(4k + 3)(7k + 7) \in \mathbb{N}$, **donc E_n est pair**

Par conséquent : E_n est pair, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que E_n est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Soit $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$E_n = 3k(6k + 1)(14k + 7), \text{ avec } k(6k + 1)(14k + 7) \in \mathbb{N}, \text{ d'où } \underline{E_n \text{ est un multiple de 3}}$$

b) Soit $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$E_n = (3k + 1)(2 \times (3k + 1) + 1)(7 \times (3k + 1) + 7)$$

$$= (3k + 1)(6k + 3)(21k + 14)$$

$$= 3(3k + 1)(2k + 1)(21k + 14), \text{ avec } (3k + 1)(2k + 1)(21k + 14) \in \mathbb{N}, \text{ d'où } \underline{E_n \text{ est un multiple de 3}}$$

c) Soit $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$:

$$E_n = (3k + 2)(2 \times (3k + 2) + 1)(7 \times (3k + 2) + 7)$$

$$= (3k + 2)(6k + 5)(21k + 21)$$

$$= 3(3k + 2)(6k + 5)(7k + 7), \text{ avec } (3k + 2)(6k + 5)(7k + 7) \in \mathbb{N}, \text{ d'où } \underline{E_n \text{ est un multiple de 3}}$$

Par conséquent, E_n est un multiple de 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$

d) Que peut-on en déduire ? Justifier.

D'abord, il existe $k \in \mathbb{N}$, $E_n = 2k$ (d'après 1))

Ensuite : il existe $k' \in \mathbb{N}$, $E_n = 3k'$ (d'après 2))

D'où : $3E_n = 6k$ et $2E_n = 6k'$, alors : $3E_n - 2E_n = E_n = 6(k - k')$, avec $k - k' \in \mathbb{Z}$,

donc E_n est divisible par 6

Exercice 5 : A consommer bien sûr avec modération...

Le nombre de bonbons contenus dans un paquet est compris entre 180 et 195.

- Coline fait des paquets de 6 bonbons et il lui en reste 5.
- Quiterie préfère faire des paquets de 4 bonbons et il lui en reste 1.

Quel est le nombre exact de bonbons dans ce paquet ?

Soit n le nombre de bonbons de ce paquet :

On a : $n = 6q + 5$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq 5 < 6$

Et de même : $n = 4q' + 1$, avec $q' \in \mathbb{N}$ et $0 \leq 1 < 4$

On a : $180 \leq n \leq 195$

D'où : $175 \leq n - 5 \leq 190$, comme $n - 5 = 6q$, on cherche les multiples de 6 dans l'intervalle $[175 ; 190]$

Il y a : $\underline{180} = 6 \times 30$ et $\underline{186} = 6 \times 31$.

D'où : $n - 5 = 180$, c'est-à-dire : $n = 185$ ou $n - 5 = 186$, c'est-à-dire : $n = 191$

On raisonne de même avec $n - 1 = 4q'$. On cherche les multiples de 4 dans l'intervalle : $[179 ; 194]$

Il y en a quatre : $4 \times 45 = \underline{180}$; $4 \times 46 = \underline{184}$; $4 \times 47 = \underline{188}$ et $4 \times 48 = \underline{192}$

D'où : $n - 1 = 180$, c'est-à-dire : $n = 181$

$n - 1 = 184$, c'est-à-dire : $n = 185$

$n - 1 = 188$, c'est-à-dire : $n = 189$

$n - 1 = 192$, c'est-à-dire : $n = 193$

La seule possibilité est **$n = 185$**

Par conséquent : **Le paquet contient 185 bonbons**

Exercice 6 : BONUS

Montrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Par récurrence :

- Initialisation :

Soit $n = 0$, on a : $3^{2 \times 0} - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et $7 \mid 0$.

La propriété est donc initialisée.

- Hérité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$3^{2k} - 2^k$ est divisible par 7, autrement dit : il existe un entier p tel que :

$$3^{2k} - 2^k = 7p.$$

Nous allons démontrer cette propriété au rang $k + 1$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } 3^{2(k+1)} - 2^{k+1} &= 3^{2k+2} - 2^{k+1} \\ &= 3^2 \times (3^{2k} - 2^k) + 3^2 \times 2^k - 2^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 9 \times 7p + 2^k (9 - 2) \\ &= 7(9p + 2^k), \text{ avec } 9p + 2^k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc : $3^{2(k+1)} - 2^{k+1}$ est un multiple de 7. La propriété est donc héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Par conséquent :

$3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$