Option Maths expertes (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Nombres complexes : Point de vue algébrique*	Fait le mercredi 27 septembre 2023

Exercice 1 :

1) Soient z_1 et z_2, deux nombres complexes.
Montrer que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$ et $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$
On a : $z_1 = z_2$, $\quad x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$
$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) = 0$
Or, $0 = 0 + i\times0$
D'où : $x_1 - x_2 = 0$ et $y_1 - y_2 = 0$
C'est-à-dire : $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, donc : $\underline{\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \text{ et } \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)}$

2) Soient deux nombres complexes z et z'. Montrer que $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y', quatre réels.

$z\times z' = (x + iy)\times(x' + iy')$

$= xx' + ixy' + iyx' - yy'$

$= xx'-yy' + i(xy' + yx')$

D'où : $\overline{zz'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + yx')} = xx'-yy' - i(xy' + yx')$

Or, $\bar{z} \times \bar{z'} = (x - iy)\times(x' - iy')$

$= xx' - ixy' - iyx' - yy'$

$= xx' - yy' - i(xy' + yx')$

Donc : $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

Exercice 2 :

1) Donner la formule générale du binôme de Newton.

Soient z et z', deux nombres complexes et n un entier naturel :

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k z'^{n-k}$$

2) En utilisant cette formule, développer $(2 + i)^4$

$(2 + i)^4 = \binom{4}{0}2^0\times i^{4-0} + \binom{4}{1}2^1\times i^{4-1} + \binom{4}{2}2^2\times i^{4-2} + \binom{4}{3}2^3\times i^{4-3} + \binom{4}{4}2^4\times i^{4-4}$

$= i^4 + 4\times2\times i^3 + 6\times4\times i^2 + 4\times8\times i + 16$

$= 1 - 8i - 24 + 32i + 16$

$= \underline{-7 + 24i}$

Exercice 3 :

Soit Z = $\frac{5-2i}{7+3i}$

Méthode 1 :

1) Déterminer l'écriture algébrique de Z

$Z = \frac{(5-2i)(7-3i)}{(7+3i)(7-3i)}$

$= \frac{35-15i-14i-6}{49+9}$

$= \frac{29-29i}{58} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, d'où : $\bar{Z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

2) En déduire le calcul de $\bar{Z}$

Méthode 2 :

Déterminer $\bar{Z}$ en utilisant une propriété du cours.

$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{5-2i}{7+3i}\right)}$

$= \frac{\overline{5-2i}}{\overline{7+3i}}$ car $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, pour tout z∈ℂ et z'∈ℂ*

$= \frac{5+2i}{7-3i}$

$= \frac{(5+2i)(7+3i)}{(7-3i)(7+3i)}$

$= \frac{35+15i+14i-6}{49+9} = \frac{29+29i}{58} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Exercice 4 :

Résoudre les équations suivantes (les solutions seront écrites sous forme algébrique)

1) $3z + 2 = i(z-4) + 5(1-z)$ 2) $7 - 3z + z^2 = 0$

1)

$z(3 - i + 5) = -4i + 5 - 2$

$\Leftrightarrow z(8-i) = 3 - 4i$

$\Leftrightarrow z = \frac{3-4i}{8-i} = \frac{(3-4i)(8+i)}{(8-i)(8+i)} = \frac{24+3i-32i+4}{64+1} = \frac{28-29i}{65} = \frac{28}{65} - \frac{29}{65}i$

2) $z^2 - 3z + 7 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 7 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 9 - 28 = -19 < 0$, d'où l'équation admet deux solutions complexes conjuguées,

$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3+i\sqrt{19}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{3-i\sqrt{19}}{2}$

$\boxed{\text{Donc } S = \left\{\frac{3+i\sqrt{19}}{2} ; \frac{3-i\sqrt{19}}{2}\right\}}$

Exercice 5 :

Soient x et y, deux réels, différents de 0

On pose : $Z = \frac{2x+3}{x+iy}$.

$$Z = \frac{2x + 3}{x + iy} = \frac{(2x + 3)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)}$$
$$= \frac{2x^2 - 2ixy + 3x - 3iy}{x^2 + y^2}$$
$$= \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + y^2} + i\frac{-2xy - 3y}{x^2 + y^2}$$

1) Déterminer les valeurs possibles de x et y pour que Z soit réel

Z est réel $\Leftrightarrow$ Im(Z) = 0

$\Leftrightarrow \frac{-2xy - 3y}{x^2 + y^2} = 0$

$\Leftrightarrow -2xy - 3y = 0$

$\Leftrightarrow y(-2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 3 = 0$ car $y \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$, avec $y \neq 0$

2) Déterminer les valeurs possibles de x et y pour que $Z \in i\mathbb{R}$

$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$ Re(Z) = 0

$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + y^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(2x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0$, car $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ avec $x \neq 0$