Option Maths Expertes	<u>Devoir maison :</u> <i>Congruences</i>	Pour le mercredi 4 janvier 2023
--------------------------	---	---------------------------------

Dans ce problème, nous allons établir quelques critères de divisibilité :

A est un entier naturel écrit en base dix avec $n + 1$ chiffres. Si on note a_0 , le chiffre des unités, a_1 , le chiffre des dizaines, a_2 , le chiffre des centaines, etc..., alors :

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$

Chaque a_i désigne un entier compris entre 0 et 9. On écrit : $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$

Exemple :

$$42\,901 = 4 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 0 \times 10 + 1$$

1) Critère de divisibilité par 9 :

- a) Justifier que $10 \equiv 1 [9]$
- b) Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1 [9]$
- c) En déduire que $A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 [9]$
- d) Conclure concernant un critère simple de divisibilité par 9 (justifier)

2) Critère de divisibilité par 3 :

Procéder de la même façon pour établir un critère simple de divisibilité par 3 (justifier chaque étape)

3) Critère de divisibilité par 5 :

Démontrer le critère suivant :

Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5

4) Critère de divisibilité par 4 :

Démontrer le critère suivant :

Un entier naturel est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4

5) Critère de divisibilité par 11 :

- a) Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n \equiv (-1)^n [11]$
- b) Ecrire le résultat précédent selon la parité de n
- c) Démontrer le critère suivant :

Un nombre entier naturel est divisible par 11 lorsque la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11.

Indication : Si un entier A s'écrit $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, alors la somme alternée des chiffres de A est donnée par : $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$