Option Maths Expertes (M Mangeard)	**Corrigé de l'évaluation :** *Nombres complexes : écriture algébrique/Conjugué/Equations du premier et du second degré*	Faite le mercredi 28 septembre 2022

Exercice 1 : Cours

1) Montrer soigneusement que l'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique

Soit $z \in \mathbb{C}$: on suppose qu'il existe x, y, x', y', quatre réels, tels que :

$z = x + iy = x' + iy'$

$\Leftrightarrow x - x' + i(y - y') = 0$

or, $0 = 0 + i \times 0$

or, $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ \text{et} \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

d'où : $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$

$\Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

Donc l'écriture algébrique de z est unique

2) Soient z et z', deux nombres complexes, montrer soigneusement que :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

Soient z et z', deux nombres complexes

$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

On a : $\overline{z+z'} = \overline{x + x' + i(y+y')} = x + x' - i(y+y')$

de plus : $\bar{z} + \bar{z'} = x - iy + x' - iy'$

$= x + x' - i(y + y')$

Donc : $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

Exercice 2 :

1) Déterminer l'écriture algébrique du complexe z suivant :

$$z = \frac{4+5i}{3-i}$$

$z = \dfrac{(4+5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$= \dfrac{12 + 4i + 15i - 5}{3^2 + 1}$

$= \dfrac{7 + 19i}{10} = \dfrac{7}{10} + \dfrac{19}{10}i$

2) Même question avec $\bar{z}$, sachant que $z = (4i - 7)^3$ (en justifiant soigneusement à l'aide des propriétés du cours)

$\bar{z} = \overline{(4i-7)^3}$

$= \overline{4i-7}^{\,3}$ (car $\overline{z^n} = \bar{z}^n$)

$= (-4i-7)^3$ (car $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$)

$= (-1)^3(4i+7)^3 = -(4i+7)^3$

$= -(4i+7)^2(4i+7)$

$= -(\underbrace{16i^2}_{-16}+56i+49)(4i+7)$

$= -(33+56i)(4i+7)$

$= -(132i+231+\underbrace{224i^2}_{=-224}+392i)$

$= -132i-231+224-392i$

$\bar{z} = -7-524i$

Exercice 3 :

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^4 - 3z^3 + z^2 + 9z - 12 = (z^2 - 3z + 4)(z^2 - 3)$

$(z^2-3z+4)(z^2-3) = z^4-3z^2-3z^3+9z+4z^2-12$

$= z^4-3z^3+z^2+9z-12$

2) En déduire la résolution de l'équation : $z^4 - 3z^3 + z^2 + 9z - 12 = 0$

On a, d'après 1, $z^4-3z^3+z^2+9z-12=0$

$\Leftrightarrow (z^2-3z+4)(z^2-3)=0$

$\Leftrightarrow z^2-3z+4=0$ ou $z^2-3=0$

$z^2-3z+4=0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$= (-3)^2-4\times1\times4$

$= 9-16 = -7 < 0$: d'où l'équation admet deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \bar{z_1} = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$

$z^2-3 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 3$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$

Donc : $S = \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i; \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$

Exercice 4 :

En posant z = x + iy, résoudre l'équation : $8iz + 2\bar{z} + 5 = 4 - 7i$

$z = x + iy$:

$$8i(x+iy) + 2(x-iy) + 5 = 4 - 7i$$

$$\Leftrightarrow 8ix - 8y + 2x - 2iy + 5 = 4 - 7i$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8y + 5 + i(8x - 2y) = 4 - 7i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y + 5 = 4 \\ 8x - 2y = -7 \end{cases} \quad \left(\text{car } z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y = -1 \\ 8x - 2y = -7 \quad (\times(-4)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y = -1 \\ -32x + 8y = 28 \quad (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y = -1 \\ -30x = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 2x + 1 \\ x = \frac{27}{-30} = -\frac{\cancel{3} \times 9}{\cancel{3} \times 10} = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8}\left(2 \times \left(-\frac{9}{10}\right) + 1\right) \\ x = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{10} \\ x = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

Donc : $S = \left\{ -\frac{9}{10} - \frac{1}{10} i \right\}$