Option Mathématiques expertes (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Matrices*	Fait le mercredi 01/02/2023

Exercice 1 :

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Peut-on effectuer le produit A×B ? Justifier. Si tel est le cas, le faire à la main en détaillant.

Le nombre de colonnes de A est 3 et le nombre de lignes de B est 2

On ne peut donc pas effectuer le produit A×B

2) Mêmes questions avec le produit B×A.

Nombre de colonnes de B = 2 et Nbre de lignes de A = 2

On peut donc effectuer le produit B×A

$$B\times A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7\times 3 + 1\times 2 & 7\times 1 + 1\times(-3) & 7\times(-1) + 1\times 1 \\ -1\times 3 + 2\times 2 & -1\times 1 + 2\times(-3) & -1\times(-1) + 2\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 4 & -6 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Montrer soigneusement que B est inversible

$\det B = 7\times 2 - (-1)\times 1$

$= 14 + 1 = 15 \neq 0$, d'où B est inversible

4) Calculer B^{-1} à l'aide de la formule d'inversion à détailler.

Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

D'où : $B^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Soit le système 3x3 suivant où x, y et z sont les inconnues : $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ -x + 2y - 3z = -5 \\ 5x - 4y + 9z = 19 \end{cases}$

1) Montrer que le système précédent est équivalent à l'égalité matricielle suivante :

AX = B où A, X et B sont trois matrices **à expliciter**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix}$

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ -x+2y-3z=-5 \\ 5x-4y+9z=19 \end{cases}$$

2) A l'aide de la calculatrice, calculer det A. Que peut-on en déduire ?

Avec la calculatrice, $\det A = 24 \neq 0$, d'où A est inversible

3) Montrer soigneusement que : AX = B $\Leftrightarrow$ X = $A^{-1} \times$ B

$$AX = B \iff \underbrace{A^{-1}A}_{I_3}X = A^{-1}B \text{ (en multipliant à gauche par } A^{-1})$$

$$\iff X = A^{-1}B$$

4) En déduire la résolution complète du système.

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{23}{24} & \frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{13}{24} & \frac{5}{24} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (à la calculatrice)}$$

Donc : $S = \{(-1;3;4)\}$

Exercice 3 :

On souhaite calculer A^n , pour n$\in\mathbb{N}$ sachant que A = $\begin{pmatrix} -21 & -12 \\ 40 & 23 \end{pmatrix}$

On pose P = $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible avec P^{-1} = $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que : $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on notera D

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -21 & -12 \\ 40 & 23 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 105-120 & 60-69 \\ 42-40 & 24-23 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15+18 & 45-45 \\ 2-2 & -6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

2) Pour tout n$\in\mathbb{N}$, déterminer D^n (sans justifier)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

3) Montrer par récurrence que pour tout n∊ℕ, $A^n = PD^nP^{-1}$

* Initialisation :

$A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$

d'où : $A^0 = PD^0P^{-1}$ (la prop est initialisée)

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain entier naturel k

c'est-à-dire : $A^k = PD^kP^{-1}$

On va démontrer la propriété au rang $k+1$:

$A^{k+1} = A \times A^k$, or $D = P^{-1}AP$ — en multipliant à gauche par P

d'où $PD = \underbrace{PP^{-1}}_{I_2}AP$

$PD = AP$ — en multipliant à droite par P^{-1}

$PDP^{-1} = A\underbrace{PP^{-1}}_{I_2} = A$

d'où : $A^{k+1} = PD\underbrace{P^{-1} \times P}_{=I_2}D^kP^{-1}$ (hypothèse de récurrence)

$= PDD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$ (la propriété est héréditaire)

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc : $A^n = PD^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) En déduire A^n, pour tout n∊ℕ de manière explicite.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & -3\times(-1)^n \\ -2\times 3^n & 5\times(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5\times 3^n + 6(-1)^n & -3^{n+1} + 3\times(-1)^n \\ 10\times 3^n - 10\times(-1)^n & +6\times 3^n - 5\times(-1)^n \end{pmatrix}$$

Vérification : Pour $n = 1$, on retrouve les coefficients de A