Option Maths Expertes (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Divisibilité / Division euclidienne*	Fait le mercredi 16 novembre 2022

Exercice 1 : (Cours)

On considère cinq entiers relatifs a, b, c, λ et μ avec a ≠ 0

On suppose que a | b et a | c.

Montrer alors soigneusement que a | λb + μc

$a \mid b \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z},\ b = ak_1$

et $a \mid c \iff \exists k_2 \in \mathbb{Z},\ c = ak_2$

$\lambda b + \mu c = \lambda a k_1 + \mu a k_2$

$= a(\underbrace{\lambda k_1 + \mu k_2}_{\in \mathbb{Z}})$, d'où $a \mid \lambda b + \mu c$

Exercice 2 :

1) Dresser la liste de tous les diviseurs de 36 dans ℕ

Diviseurs de 36 dans ℕ : $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$

2) En déduire les entiers naturels n tels que 2n+1 | 36

Soit $n \in \mathbb{N}$, $2n+1$ est un entier naturel impair

On raisonne par disjonction des cas :

1 $2n+1 = 1 \iff n = 0 \in \mathbb{N}$

2 $2n+1 = 3 \iff 2n = 2 \iff n = 1 \in \mathbb{N}$

3 $2n+1 = 9 \iff 2n = 8 \iff n = 4 \in \mathbb{N}$

Donc les seuls entiers naturels qui conviennent sont :

$S = \{0 ; 1 ; 4\}$

Exercice 3 :

Déterminer les couples d'entiers relatifs (x ;y) tels que : $x^2 - 4y^2 = 7$

$x^2 - 4y^2 = 7 \iff x^2 - (2y)^2 = 7$

$\iff (x+2y)(x-2y) = 7$

Diviseurs de 7 dans $\mathbb{Z}$: $\{-1 ; 1 ; 7 ; -7\}$

On raisonne par disjonction de cas :

① $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x-2y=-7 \end{cases} \underset{\text{par additions}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-1+4=3 \\ x=-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \\ x=-4 \end{cases}$

② $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=1-4=-3 \\ x=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \\ x=4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

③ $\begin{cases} x+2y=-7 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-7 \\ 2x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-7+4=-3 \\ x=-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \\ x=-4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x+2y=7 \\ x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=7 \\ 2x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=7-4=3 \\ x=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \\ x=4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Donc : $S=\emptyset$

Exercice 4 :

Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier relatif n, la fraction $\frac{n+4}{3n+2}$ est-elle un entier relatif ? Justifier.

$\frac{n+4}{3n+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3n+2 \mid n+4$

$3n+2 \mid 3n+2$

or, $3n+2$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $3n+2$ et $n+4$

En particulier : $3n+2 \mid \underbrace{3\times(n+4)-1\times(3n+2)}_{=\cancel{3n}+12-\cancel{3n}-2=10}$

Diviseurs de 10 dans $\mathbb{Z}$: $\{1;-1;2;-2;5;-5;10;-10\}$

Par disjonction de cas :

① $3n+2=1 \Leftrightarrow 3n=-1 \Leftrightarrow n=-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

② $3n+2=-1 \Leftrightarrow 3n=-3 \Leftrightarrow n=-1 \in \mathbb{Z}$

③ $3n+2=2 \Leftrightarrow 3n=0 \Leftrightarrow n=0 \in \mathbb{Z}$

④ $3n+2=-2 \Leftrightarrow 3n=-4 \Leftrightarrow n=-\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$

⑤ $3n+2=5 \Leftrightarrow 3n=3 \Leftrightarrow n=1 \in \mathbb{Z}$

(6) $3n+2=-5 \iff 3n=-7 \iff n=-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$

(7) $3n+2=10 \iff 3n=8 \iff n=\frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$

(8) $3n+2=-10 \iff 3n=-12 \iff n=-\frac{12}{3}=-4 \in \mathbb{Z}$

Les valeurs de n solutions sont donc :

$$S=\{-1;0;1;-4\}$$

Exercice 5 :

On a : 5 319 271 = 98 504 × 54 + 55

1) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 5 319 271 par 54 en justifiant

$5\,319\,271 = 98\,504 \times 54 + 55$ ne correspond pas à la division euclidienne de 5 319 271 par 54 car $55 > 54$

or, $98\,505 \times 54 = (98\,504+1)\times 54$

$= \underbrace{98\,504 \times 54} + 54$

$= 5\,319\,271 - 55 + 54$

$= 5\,319\,271 - 1$

d'où : $5\,319\,271 = 98\,505 \times 54 + 1$, avec : $0 \leq 1 < 54$

Donc : $\begin{cases} q = 98505 \\ r = 1 \end{cases}$

2) Même question avec la division euclidienne de : (- 5 319 271) par 98 504

on a : $-5\,319\,271 = 98\,504 \times (-54) - 55$

or : $98\,504 \times (-55) = 98\,504 \times (-54-1)$

$= \underbrace{98\,504 \times (-54)} - 98\,504$

$-5\,319\,271 + 55 - 98\,504$

$= -5\,417\,720$

or, $-5\,417\,720 + x = -5\,319\,271$

$\iff x = -5\,319\,271 + 5\,417\,720$

$= 98\,449$

d'où : $-5\,319\,271 = 98\,504 \times (-55) + 98\,449$

avec $0 \leq 98\,449 \leq 98\,504$

Donc : $\begin{cases} q = -55 \\ r = 98\,449 \end{cases}$