<table>
<tr>
<td>Option Maths Expertes
(M Mangeard)</td>
<td><u>Corrigé du devoir de mathématiques :</u>
Complexes : notation algébrique, modules, ensembles du plan complexe</td>
<td>Fait le jeudi 02 mars 2023</td>
</tr>
</table>

Exercice 1 :

Soit z = $\frac{3+2i}{1-i}$

Méthode 1 :

1) Déterminer l'écriture algébrique de z

$$z = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)}$$
$$= \frac{3+3i+2i-2}{1+1} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

2) En déduire |z|

Si $z = x+iy$, alors $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

D'où : $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

Méthode 2 :

En utilisant les propriétés du module d'un nombre complexe et en justifiant, déterminer directement |z|

$$|z| = \left|\frac{3+2i}{1-i}\right|$$
$$= \frac{|3+2i|}{|1-i|} \quad \left(\text{car } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}\right)$$

or, $|3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

et $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

d'où : $|z| = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

Exercice 2 :

Soient A, B, C et D, quatre points du plan complexe d'affixes respectives :

$z_A = -1 + i$, $z_B = 3 - i$, $z_C = 5 + 3i$ et $z_D = 1 + 5i$

1) On note M et N, les milieux respectifs de [AC] et [BD]
Calculer z_M et z_N, affixes respectives des points M et N.

Comme M est milieu de [AC], $z_M = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{-1+i+5+3i}{2}$
$$= \frac{4+4i}{2}$$
$$= 2+2i$$

Comme N est milieu de [BD], $z_N = \frac{z_B+z_D}{2} = \frac{3-i+1+5i}{2} = \frac{4+4i}{2}$
$$= 2+2i$$

Qu'en déduit-on concernant la nature du quadrilatère ABCD ?

Comme $z_M = z_N$, alors $M = N$
Le quadrilatère ABCD a alors ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

2) a) Calculer soigneusement en utilisant des modules AB, BC et AC.
b) Que peut-on alors dire du triangle ABC ? Justifier.

$AB = |z_B - z_A| = |3 - i - (-1+i)| = |4 - 2i|$
$= \sqrt{4^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$BC = |z_C - z_B| = |5+3i - (3-i)| = |2+4i|$
$= \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$

D'où : ABC est isocèle en B

$AC = |z_C - z_A| = |5+3i - (-1+i)|$
$= |6+2i| = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

On a : $AC^2 = 40$ et $AB^2 + BC^2 = 20+20 = 40$
D'où : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B

Par conséquent : ABC est rectangle et isocèle en B

c) Quelle est alors la nature plus précise du quadrilatère ABCD ?

ABCD est un parallélogramme avec un angle droit en B et BA = BC
Donc ABCD est un carré

Exercice 3 :

Déterminer les ensembles du plan suivants :

1) L'ensemble des points M(z) du plan tels que : |z + 2| = |z – 3i|

$|z - (-2)| = |z - 3i|$
on pose $A(-2)$ et $B(3i)$, d'où $MA = MB$
L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB]

2) L'ensemble des points M(z) du plan tels que : $|z + i – 5| = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow |z - (5-i)| = \frac{1}{4}$
on pose $A(5-i)$, alors $MA = \frac{1}{4}$
L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{4}$

3) L'ensemble des points M(z) du plan tels que : L = $\frac{z-i+1}{z+4}$, avec z ≠ - 4 , soit tel que |L| = 1

$|L| = \left|\frac{z-i+1}{z+4}\right| = \frac{|z-i+1|}{|z+4|}$, (car $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$)

d'où $|L| = 1 \Leftrightarrow |z-i+1| = |z+4|$

$\Leftrightarrow |z-(i-1)| = |z-(-4)|$

on pose : A(i − 1) et B(−4), on a MA = MB

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB]