

Option Maths expertes (M Mangeard)	<u>Corrigé du devoir de mathématiques</u> Complexes	Fait le 12/04/2023
--	---	--------------------

Exercice 1 :

$$z_A = -2i \quad z_B = -\sqrt{3} + i \quad z_C = \sqrt{3} + i$$

$$1) a) \quad \underline{OA} = |z_A - z_0| = |z_A| = |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = \underline{2}$$

$$\underline{OB} = |z_B| = |-\sqrt{3} + i|$$

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \underline{2}$$

$$\underline{OC} = |z_C| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \underline{2}$$

b) D'après a), $OA = OB = OC = 2$

Donc: Les points A, B et C sont situés sur le cercle de centre O
et de rayon 2

2) M milieu de [BC], d'où: $z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$

$$\underline{z_M} = \frac{-\cancel{\sqrt{3}} + i + \cancel{\sqrt{3}} + i}{2} = \underline{i}$$

3) E symétrique de A par rapport à M:

d'où: M est le milieu de [EA]

$$z_M = \frac{z_E + z_A}{2} \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{z_E - 2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_E - 2i = 2i$$

$$\Leftrightarrow \underline{z_E = 4i}$$

4) a) $\lambda = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{\sqrt{3} + i + 2i} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i}$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{(-\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)} \\
 &= \frac{-3+3\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i+9}{3+9} \\
 &= \frac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

$$|z| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \text{ avec } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On peut prendre $\theta = \frac{\pi}{3}$ (c'est un argument de z)

$$\begin{aligned}
 b) \quad |z| = 1 & \Rightarrow \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1 \quad (\text{car } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ avec } z' \neq 0) \\
 & \Rightarrow \frac{AB}{AC} = 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{AB = AC}$$

$$\text{D'après 4a), } \arg(z) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{c'est-à-dire: } (\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$c) \text{ On a: } AB = AC \text{ et } (\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Donc: le triangle ABC est équilatéral

5) D'après 2) et 3), M est le milieu de [BC] et de [EA]

D'au: ABEC a ses diagonales qui se coupent en leur milieu

donc: ABEC est un parallélogramme

comme $AB = AC$, ABEC a ses quatre côtés de même longueur

Donc ABEC est un losange

De plus, d'après 4b), $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

ABEC n'est pas un carré

Par conséquent : ABEC est un losange

Exercice 2 :

$$\begin{aligned} 1) |z_1| &= \left| -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9 \times 3}{4} + \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$2) |z| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{2}, \quad (\text{car } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \text{ pour } z' \neq 0)$$

$$\begin{aligned} 3) z &= \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})} \\ &= \frac{-\frac{3\sqrt{6}}{2} + i\frac{3\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i + \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2 + 2} \\ &= \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{4} \\ &= \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + \frac{3}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } z = \frac{3}{8}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + \frac{3}{8}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ D'après 1), } |z_1| &= 3, \text{ d'où: } z_1 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 3(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \text{ avec } \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

On peut prendre : $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

D'après 1), $|z_2| = 2$, d'où : $z_2 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
 $= 2 (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
 avec : $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

On peut prendre : $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \widetilde{\arg(z_1) - \arg(z_2)} [2\pi]$$

$$= \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$= \frac{10\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} [2\pi]$$

$$\arg(z) = \frac{7\pi}{12} [2\pi]$$

On peut donc prendre $\arg(z) = \frac{7\pi}{12}$

5) D'après 2), $|z| = \frac{3}{2}$ et $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
 avec $\theta = \arg(z)$

D'où : $z = \frac{3}{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$ forme trigonométrique de z

6) D'après 3), $z = \frac{3}{8}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + \frac{3}{8}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i$

Or, $z = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)i$

En identifiant les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles :

$$\frac{3}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{3}{8}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

et $\frac{3}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{3}{8}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Exercice 3 :

1) Par récurrence :

* Initialisation: $z^0 = 1$ et $\arg(1) = 0 \ [2\pi]$

$$\text{or, } 0 \times \arg(z) = 0 \ [2\pi]$$

d'au: $\arg(z^0) = 0 \times \arg(z) \ [2\pi]$ (La prop est initialisée)

* Hérédité: On suppose la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$

Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$

$$\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n \times z) \ [2\pi]$$

$$= \arg(z^n) + \arg(z) \ [2\pi] \quad (\text{d'après la prop. admise})$$

$$= n \arg(z) + \arg(z) \ [2\pi] \quad (\text{d'après l'hyp. de récurrence})$$

$$\arg(z^{n+1}) = (n+1) \arg(z) \ [2\pi] \quad \text{La prop. est héréditaire}$$

* Conclusion:

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc: Pour tout } n \in \mathbb{N}, \arg(z^n) = n \arg(z) \ [2\pi]$$

2) a) soit $z = -2 + 2i$, $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\text{D'au: } z = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \text{ avec } \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{On peut prendre: } \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \arg(z) &= \arg(-2+2i)^{2022} \quad [2\pi] \\
 &= 2022 \times \arg(-2+2i) \quad [2\pi] \quad (\text{d'après 1}) \\
 &= 2022 \times \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi] \quad (\text{d'après 2a}) \\
 &= \frac{3033}{2} \pi \quad [2\pi] \\
 &= \frac{3032}{2} \pi + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\
 &= 1516\pi + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]
 \end{aligned}$$

donc: $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
 c'est-à-dire: $z \in i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur)

Exercice 4 :

1) $|z - 3i + 2| = 4 \Leftrightarrow |z - (-2 + 3i)| = 4$
 on pose: $A(-2 + 3i)$

d'où: $AM = 4$
L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 4

2) $|z - 2i| = |z + 2| \Leftrightarrow |z - 2i| = |z - (-2)|$
 on pose $A(2i)$ et $B(-2)$

on a: $MA = MB$
L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $\{AB\}$

3) $\arg\left(\frac{z-2}{z+3i}\right) = \pi \quad [\pi]$

on pose $A(2)$ et $B(-3i)$

d'où: $\arg\left(\frac{z-2}{z+3i}\right) = (\underbrace{\arg\left(\frac{z-2}{z+3i}\right)}_{(\vec{MB}, \vec{MA})}) \quad [2\pi]$

d'où: $(\vec{MB}, \vec{MA}) = \pi \quad [\pi]$

L'ensemble cherché est la droite (AB)



