

Option Maths Expertes	<u>Corrigé du devoir</u> <u>maison :</u> <i>Congruences</i>	Rendu le mercredi 4 janvier 2023
--------------------------	---	-------------------------------------

Dans ce problème, nous allons établir quelques critères de divisibilité :

A est un entier naturel écrit en base dix avec $n + 1$ chiffres. Si on note a_0 , le chiffre des unités, a_1 , le chiffre des dizaines, a_2 , le chiffre des centaines, etc..., alors :

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$

Chaque a_i désigne un entier compris entre 0 et 9. On écrit : $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$

Exemple :

$$42\,901 = 4 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 0 \times 10 + 1$$

1) Critère de divisibilité par 9 :

a) Justifier que $10 \equiv 1 [9]$

$$10 = 1 \times 9 + 1, \text{ avec } 0 \leq 1 < 9$$

d'où $10 \equiv 1 [9]$

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1 [9]$

D'après a), $10 \equiv 1 [9]$

d'où par passage à la puissance n , ($n \in \mathbb{N}$),

$$10^n \equiv 1 [9]$$

c) En déduire que $A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 [9]$

$$\text{On a } A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

D'après 1) b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv 1 [9]$

Par multiplication: $a_n \times 10^n \equiv 1 \times a_n [9]$

$$\equiv a_n [9]$$

de même: $a_{n-1} \times 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \times 1 [9]$

$$\equiv a_{n-1} [9]$$

etc... $a_1 \times 10 \equiv 1 \times a_1 [9]$ et $a_0 \equiv a_0 [9]$

$$\equiv a_1 [9]$$

D'où, par somme: $A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 [9]$

d) Conclure concernant un critère simple de divisibilité par 9 (justifier)

D'après 1) c), $A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 [9]$

or, A est divisible par 9 ($\Rightarrow A \equiv 0 [9]$)

Par transitivité de la relation de congruence,

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 [9]$$

$$(\Rightarrow) 9 \mid a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

Autrement dit : A est divisible par 9 $\Leftrightarrow$ la somme de ses chiffres est divisible par 9

2) Critère de divisibilité par 3 :

Procéder de la même façon pour établir un critère simple de divisibilité par 3 (justifier chaque étape)

On a : $10 \equiv 1 [3]$, car $10 = 3 \times 3 + 1$, avec $0 \leq 1 < 3$

Par passage à la puissance n , $n \in \mathbb{N}^*$: $10^n \equiv 1 [3]$

Même méthode que pour la 1)

$$\left. \begin{array}{l} \text{On a : } A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 [3] \\ \text{et } A \equiv 0 [3] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Donc :} \\ a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 [3] \end{array}$$

Par conséquent : A est divisible par 3 $\Leftrightarrow 3 \mid a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$

3) Critère de divisibilité par 5 :

Démontrer le critère suivant :

Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5

Comme 10 est un multiple de 5, $10 \equiv 0 [5]$

Par passage à la puissance n ($n \in \mathbb{N}^*$), $10^n \equiv 0 [5]$

Par produit, $a_n \times 10^n \equiv 0 [5]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d'où, par somme, $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv 0 + a_0 [5]$
 $\equiv a_0 [5]$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Or, } A \text{ est divisible par 5} \Leftrightarrow A \equiv 0 [5] \\ \text{et } A \equiv a_0 [5] \end{array} \right\} \text{donc : } a_0 \equiv 0 [5]$$

Comme a_0 est un entier compris entre 0 et 9

d'où : $a_0 = 0$ ou 5 (a_0 : chiffre des unités de A)

Par conséquent : A est divisible par 5 $\Leftrightarrow$ son chiffre des unités est 0 ou 5

4) Critère de divisibilité par 4 :

Démontrer le critère suivant :

Un entier naturel est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4

$10 = 4 \times 2 + 2$, avec $0 \leq 2 < 4$, d'où $10 \equiv 2 [4]$

$10^2 \equiv 4 [4]$, par passage au carré, c'est-à-dire : $10^2 \equiv 0 [4]$

Par produit, puis par somme, $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \equiv 10 \times a_1 + a_0 [4]$
 $\equiv 0 [4]$

on a: A est divisible par 4 $\Leftrightarrow A \equiv 0 [4]$ } donc:
 or, $A \equiv 10a_1 + a_0 [4]$ } $10a_1 + a_0 \equiv 0 [4]$
 nombre entier
 formé par les 2 derniers chiffres

Par conséquent: A est divisible par 4 $\Leftrightarrow$ le nombre entier formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4

5) Critère de divisibilité par 11 :

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n \equiv (-1)^n [11]$

$11 \equiv 0 [11] \Leftrightarrow 10 + 1 \equiv 0 [11]$
 donc: $10 \equiv -1 [11]$ (car si: $a \equiv b [m]$
 alors $a - 1 \equiv b - 1 [m]$)

D'où par passage à la puissance n , $n \in \mathbb{N}^*$
 $10^n \equiv (-1)^n [11]$

b) Ecrire le résultat précédent selon la parité de n

* Si n est pair: $(-1)^n = 1$
 d'où $10^n \equiv 1 [11]$, si n est pair

* Si n est impair: $(-1)^n = -1$
 d'où $10^n \equiv -1 [11]$, si n est impair

c) Démontrer le critère suivant :

Un nombre entier naturel est divisible par 11 lorsque la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11.

Par produit: $a_n \times 10^n \equiv a_n \times (-1)^n [11]$
 d'où, par somme: $A \equiv 1 \times a_0 + (-1) \times a_1 + 1 \times a_2 + (-1) \times a_3 + \dots + (-1)^n a_n [11]$

A est divisible par 11 $\Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \equiv 0 [11]$

Par conséquent:

Un nombre entier naturel est divisible par 11 lorsque la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11.

Indication : Si un entier A s'écrit $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, alors la somme alternée des chiffres de A est donnée par : $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$