Option Maths expertes

Corrigé du devoir sur les suites de matrices

(Fait le 24/03/22)

Total /20

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 300 \\ b_0 = 300 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \qquad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$$a_1 = 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 = 0,7\times300 + 0,2\times300 + 60 = 330$$

(1)

et $$b_1 = 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 = 0,1\times300 + 0,6\times300 + 70 = 280$$

(1)

Donc : $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$M\times U_n + C = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix}$$

(2) (−1 si mal rédigé).

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

2) a)

$$(I_2 - M)\times\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3\times4 - 0,2\times1 & 0,3\times2 - 0,2\times3 \\ -0,1\times4 + 0,4\times1 & -0,1\times2 + 0,4\times3 \end{pmatrix}$$

(2) (−0,5 si mal pas détaillé)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) D'après a), $(I_2 - M)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I_2$

d'où $\underline{I_2 - M \text{ est inversible et } (I_2 - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$

1 1

$X = MX + C$

c) $X - MX = C$

$\Leftrightarrow (I_2 - M) \times X = C$

D'après b) :

$I_2 - M$ est inversible 2

d'où : $\underbrace{(I_2 - M)^{-1} \times (I_2 - M)}_{= I_2} \times X = (I_2 - M)^{-1} \times C$

donc : $\underline{X = (I_2 - M)^{-1} \times C}$

d) D'après b), on sait que : $(I_2 - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d'où : $\underline{X =} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 60 + 2 \times 70 \\ 1 \times 60 + 3 \times 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 + 140 \\ 60 + 210 \end{pmatrix}$ 1

$= \underline{\begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}}$ (−0,5) si prod pas détaillé.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$V_n = U_n - X$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - X = M \times U_n + C - X$

$= M \times U_n + C - (MX + C)$ (car $X = MX + C$).

$= M(U_n - X)$ 2

donc : $\underline{V_{n+1} = M V_n \text{, pour tout } n \in \mathbb{N}}$

b) Par récurrence :

* Initialisation : Pour $n = 0$

$M^0 = I_2$ et $I_2 \times V_0 = V_0$, d'où $V_0 = M^0 \times V_0$. (la prop. est initialisée)

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

2 $V_{k+1} = M V_k = M \times M^k \times V_0 = M^{k+1} \times V_0$, donc la prop est héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire
Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

a) $V_n = U_n - X \iff U_n = V_n + X$ (2)

$$= \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380 \\ -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270 \end{pmatrix}$$

b) Comme $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

on a : $a_n = \frac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, car $-1 < 0{,}5 < 1$
$-1 < 0{,}8 < 1$ (2) (-1 si $\lim q^n$ non justifié).

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 380$

A long terme, le nombre d'abonnés de l'opérateur A va se stabiliser autour de 380 000 (1)