

NOM : Prénom :

Option Maths expertes	Devoir : <i>Suite de matrices</i>	Jeudi 24 mars 2022
--------------------------	---	--------------------

- Durée : 45 min
- Calculatrice autorisée
- Rendre le sujet

Observations :

NOTE : **/20**

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2022.

En 2022, les deux opérateurs ont chacun 300 mille abonnés.

On note a_n : le nombre d'abonnés en milliers de l'opérateur A l'année 2022+n

b_n : le nombre d'abonnés en milliers de l'opérateur B l'année 2022+n

Alors : $a_0 = 300 = b_0$

On admet qu'à la suite d'observations réalisées les années précédentes, on peut modéliser la situation de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$$

On considère les matrices suivantes : $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

1) a) Déterminer U_1 en justifiant

b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = M \times U_n + C$

2) On note I_2 la matrice identité

a) Calculer $(I_2 - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) En déduire que $I_2 - M$ est inversible et préciser sa matrice inverse.

On considère la matrice X telle que $X = MX + C$

c) Montrer que $X = (I_2 - M)^{-1} \times C$

d) En déduire que $X = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n - X$

a) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = MV_n$

NOM :Prénom :

b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n \times V_0$

4) On admet que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

a) Exprimer U_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ en justifiant. En déduire le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme (faire une phrase)