

NOM : Prénom :

Option Mathématiques expertes	Devoir : Matrices et congruences	Jeudi 20 janvier 2022
-------------------------------------	---	-----------------------

- Durée : 45 min
- Rendre le sujet
- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE : /20

Exercice 1 : (2,5 pts)

On donne les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Les produits suivants ont-ils un sens ? Justifier.

$$A \times B \quad B \times C \quad C \times B$$

b) Si oui, les calculer

Exercice 2 : (5 pts)

On note $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Première méthode : Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} avec les formules.

2) Deuxième méthode :

a) Montrer que $P^2 - 4P = -4I_2$.

b) En déduire que P est inversible et déterminer alors P^{-1} .

Exercice 3 : (4 pts)

On souhaite utiliser le calcul matriciel pour résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x - 3y + 2z = -9 \\ -2x + y - z = 6 \\ 3x - 2y - 3z = -15 \end{cases}$$

On pose $C = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) Montrer que le système (S) est équivalent à l'égalité suivante : $A \times X = C$, où A est une matrice que l'on explicitera.

2) Calculer A^{-1} à la calculatrice

3) Montrer que $X = A^{-1} \times C$

4) En déduire les valeurs exactes de x, y et z

NOM :Prénom :

Exercice 4 : (3,5 pts)

- 1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier n par 4
- 2) A l'aide d'un tableau des restes de congruence, déterminer les entiers relatifs n tels que $a = n^2 + 2n - 3$ soit un multiple de 4.

Exercice 5 : (5 pts)

Les questions 1) et 2) sont indépendantes

- 1)
 - a) Ecrire la division euclidienne de 67 par 10.
 - b) Justifier que $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$.
 - c) En utilisant les questions précédentes, déterminer le chiffre des unités de 67^{2022}
- 2) Montrer, en utilisant les congruences, que pour tout entier naturel n , $7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13.