Option Mathématiques expertes	**Corrigé du devoir :** *Matrices et congruences*	Fait le jeudi 20 janvier 2022

Exercice 1 : (2,5 pts)

On donne les trois matrices suivantes :

A = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

a) Les produits suivants ont-ils un sens ? Justifier.

A$\times B$ $B \times C$ $C \times B$

- A est de dimension 3×1
- B est de dimension 2×3

} le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B donc $A \times B$ n'est pas défini

- C est de dimension 2×2) le nombre de colonnes de $B = 3 \neq 2 =$ nombre de lignes de C

donc : $B \times C$ n'est pas défini

- Le nombre de colonnes de C est égal au nombre de lignes de B, donc :

$C \times B$ est défini

b) Si oui, les calculer :

$$C \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 0 + 3\times(-1) & 2\times 3 + 3\times(-4) & 2\times(-2) + 3\times 1 \\ -4\times 0 + 5\times(-1) & -4\times 3 + 5\times(-4) & -4\times(-2) + 5\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 \\ -5 & -32 & 13 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : (5 pts)

On note P = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) *Première méthode :* Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} avec les formules.

$\det P = 3\times 1 - 1\times(-1)$

$= 3 + 1 = 4 \neq 0$, donc P est inversible

Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors : $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

d'où : $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

2) *Deuxième méthode :*

a) Montrer que $P^2 - 4P = -4I_2$.

$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9-1 & -3-1 \\ 3+1 & -1+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

d'où : $P^2 - 4P = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8-12 & -4+4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_2}$

donc : $P^2 - 4P = -4I_2$

b) En déduire que P est inversible et déterminer alors P^{-1}.

Comme $P^2 - 4P = -4I_2$ (d'après 2 a))

$\Leftrightarrow P(P - 4I_2) = -4I_2$

$\Leftrightarrow P \times \left[\left(-\frac{1}{4}\right)(P - 4I_2)\right] = I_2$

donc : P est inversible et $P^{-1} = \left(-\frac{1}{4}\right) \times (P - 4I_2)$

on a : $P - 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ 1 & 1-4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

d'où : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Exercice 3 : (4 pts)

On souhaite utiliser le calcul matriciel pour résoudre le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x-3y+2z=-9 \\ -2x+y-z=6 \\ 3x-2y-3z=-15 \end{cases}$$

On pose C = $\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) Montrer que le système (S) est équivalent à l'égalité suivante : A × X = C, où A est une matrice que l'on explicitera.

On a : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+2z=-9 \\ -2x+y-z=6 \\ 3x-2y-3z=-15 \end{cases}$ (S)

D'où : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

2) Calculer A^{-1} à la calculatrice

A la calculatrice : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{24} & -\frac{13}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{5}{24} \end{pmatrix}$

3) Montrer que X = A^{-1}×C

Comme : $AX = C$ et que A est inversible,

$\underbrace{A^{-1} \times A}_{=I_3} X = A^{-1} C$ (multiplication à gauche)

d'où : $X = A^{-1} C$

4) En déduire les valeurs exactes de x, y et z

$$A^{-1} \times C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{24} & -\frac{13}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{5}{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{24} - \frac{78}{24} - \frac{15}{24} \\ \frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{15}{8} \\ -\frac{9}{24} - \frac{42}{24} + \frac{75}{24} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc : $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

Remarque : On a $\begin{cases} x-3y+2z = -2-3\times3+2\times1 = -9 \\ 2x+y-z = -2\times(-2)+3-1 = 6 \\ 3x-2y-3z = 3\times(-2)-2\times3-3\times1 = -15 \end{cases}$

Les valeurs de x, y et z vérifient bien le système (S)

Exercice 4 : (3,5 pts)

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier n par 4

Division euclidienne par 4 :
restes possibles : 0, 1, 2, ou 3 car $0 \leq r < 4$

2) A l'aide d'un tableau des restes de congruence, déterminer les entiers relatifs n tels que $a = n^2 + 2n - 3$ soit un multiple de 4.

modulo 4

$n \equiv$	0	1	2	3
$n^2 \equiv$	0	1	0	1
$2n \equiv$	0	2	0	2
$n^2+2n \equiv$	0	3	0	3
$n^2+2n-3 \equiv$	1	0	1	0

n^2+2n-3 est un multiple de 4
$\iff n^2+2n-3 \equiv 0\ [4]$
D'après le tableau :
$n \equiv 1\ [4]$ ou $n \equiv 3\ [4]$
c'est-à-dire :
$n = 4k+1$ ou $n = 4k+3$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 5 : (5 pts)

Les questions 1) et 2) sont indépendantes

1) a) Ecrire la division euclidienne de 67 par 10.

$67 = 10\times6+7$, avec $0 \leq 7 < 10$

b) Justifier que $7^4 \equiv 1\ (10)$.

$7^4 = 2401$, d'où $7^4 - 1 = 2400 = 10\times240 \equiv 0\ [10]$

donc : $7^4 \equiv 1\ [10]$

c) En utilisant les questions précédentes, déterminer le chiffre des unités de 67^{2022}

$67 \equiv 7\ [10]$ (d'après 1)a))

d'où $67^{2022} \equiv 7^{2022}\ [10]$ (par passage à la puissance 2022)

or, $2022 = 4\times505+2$

d'où : $7^{2022} = (7^4)^{505+2}$

d'après 1b) $7^4 \equiv 1\ [10]$, d'où par passage à la puissance :

$(7^4)^{505} \equiv 1\ [10]$

et $(7^4)^{505} \times 7^2 \equiv 7^2 \,[10]$ (par produit)

$\equiv 9 \,[10]$

or, la relation de congruence est transitive, d'où :

$$67^{2022} \equiv 9 \,[10]$$

c'est-à-dire : Le chiffre des unités de 67^{2022} est 9

2) Montrer, en utilisant les congruences, que pour tout entier naturel n, $7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13.

$7^2 = 49 \equiv 10 \,[13]$ $\quad$ $23 \equiv 10 \,[13]$

d'où : $7^{2n} \equiv 10^n \,[13]$ et $23^n \equiv 10^n \,[13]$ (par passage à la puissance n)

d'où : $7^{2n} - 23^n \equiv 10^n - 10^n \,[13]$ (par différence)

$\iff 7^{2n} - 23^n \equiv 0 \,[13] \iff 7^{2n} - 23^n$ est divisible par 13 pour tout $n \in \mathbb{N}$.