Option Maths Complémentaires (M Mangeard)	**Cours : Fonction logarithme népérien**	Année scolaire 2020/2021

Introduction :

John Napier (ou Néper) (1550-1617) : Mathématicien, astronome, physicien, théologien écossais.

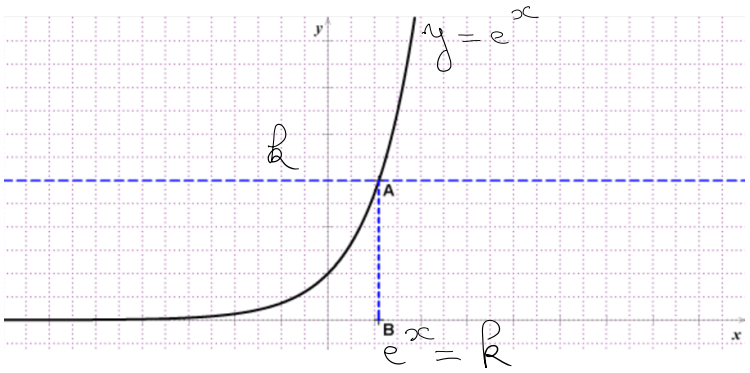
Il invente les logarithmes dans le but de faciliter le travail des calculateurs dans certains domaines (astronomie, navigation, banques, etc…) en « transformant » des multiplications en additions, plus faciles à effectuer. Avec Henry Briggs (1561-1630) (années du calendrier grégorien), mathématicien anglais, il invente et perfectionne les logarithmes décimaux.

Pré requis :

On suppose connue la fonction exponentielle et toutes ses propriétés.

I) Fonction logarithme népérien :

1) Lien avec la fonction exponentielle :



Soit k un réel strictement positif. On se demande si *l'équation $e^x = k$ admet des solutions*.

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

D'autre part, $k \in]0 ; +\infty[=] \lim_{x\to-\infty} e^x ; \lim_{x\to+\infty} e^x[$

D'où, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$. On la note **ln(k)**

2) Définition :

La fonction qui, à $k \in]0 ; +\infty[$ associe l'unique solution de l'équation $e^x = k$ est appelée fonction logarithme népérien notée ln

3) Conséquences de la définition :

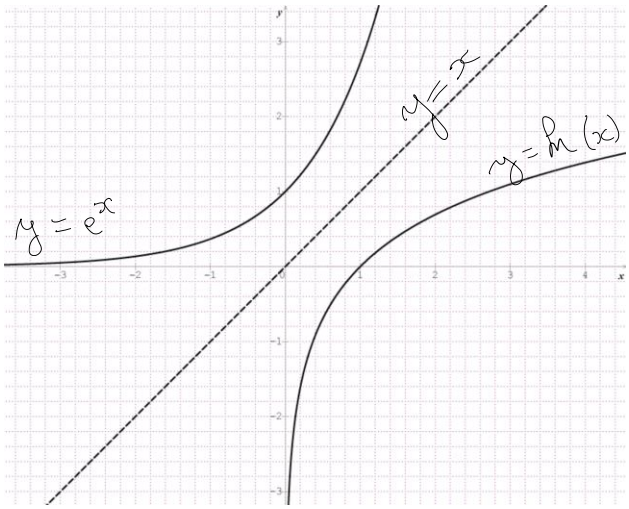
a) Pour tout $(x ; y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, nous avons l'équivalence suivante : $\boxed{x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)}$

b) Pour tout x $\in \mathbb{R}^{*+}$, $\boxed{e^{\ln(x)} = x}$

c) Pour tout x $\in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(e^x) = x}$

d) Cas particuliers : $\boxed{\ln(1) = 0}$ (car $e^0 = 1$) $\boxed{\ln(e) = 1}$ (car $e^1 = e$) (on dit que ln est le logarithme de base e)

4) Propriété :



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la première bissectrice (= la droite d'équation y = x)

On dit alors que **ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.**

Remarque : La fonction racine carrée et la fonction carré sont réciproques l'une de l'autre sur [0 ;+∞[

5) Variations de la fonction ln :

a) Propriété :

La fonction ln est strictement croissante sur]0 ;+∞[

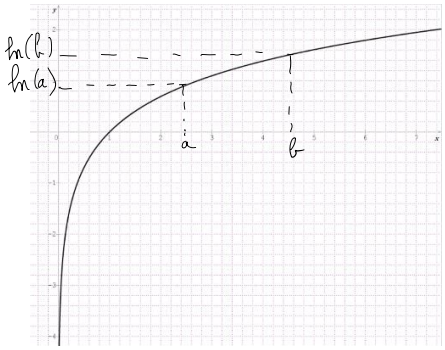
Démonstration :

Soient a et b, deux nombres réels tels que : 0 < a < b :

Autrement dit : $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$

Comme exponentielle est une fonction strictement croissante, alors : ln(a) < ln(b)

Donc : la fonction ln est strictement croissante sur]0 ;+∞[



b) Propriété :

Pour tous réels a et b, strictement positifs,

$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$
$\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$
$\ln(a) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Résolution d'équations et d'inéquations :

Exemples :

1) Résoudre l'équation ln(3x + 2) = 1

Tout d'abord, ln(3x + 2) est défini $\Leftrightarrow 3x + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

On va donc résoudre cette équation sur $]-\frac{2}{3} ; +\infty[$:

$\ln(3x + 2) = 1 \Leftrightarrow \ln(3x + 2) = \ln(e) \Leftrightarrow 3x + 2 = e \Leftrightarrow x = \frac{e-2}{3} > -\frac{2}{3}$

Donc : $\mathbf{S = \{\frac{e-2}{3}\}}$

2) Résoudre l'inéquation : $ln(x^2 + 1) \geq ln(-x+5)$

Tout d'abord, $x^2 + 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $\ln(x^2 + 1)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$

$-x + 5 > 0 \Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$. D'où : ln(-x+5) est défini pour tout $x \in]-\infty ;5[$

On va donc résoudre cette inéquation sur $]-\infty ;5[$:

$\ln(x^2 + 1) \geq \ln(-x+5) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq -x + 5$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 4 \geq 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times(-4) = 17 > 0$

Le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, a = 1 > 0

D'où : $x^2 + x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{17}}{2} ;+\infty[$

Or, $]-\infty ; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{17}}{2} ;5[\subset]-\infty ;5[$, donc : $\boxed{S =]-\infty ; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{17}}{2} ;5[}$

II) Propriétés algébriques du logarithme népérien :

1) Relation fonctionnelle :

Soient a et b , deux réels **strictement positifs**. Alors : $\boxed{\ln(a\times b) = \ln(a) + \ln(b)}$

Démonstration :

D'une part : $e^{\ln(a\times b)} = a \times b$, d'autre part : $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$

D'où : $e^{\ln(a\times b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)}$

Or, $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$, donc : $\boxed{\ln(a\times b) = \ln(a) + \ln(b)}$

2) Logarithme d'un inverse, d'un quotient :

Soient a et b, deux réels strictement positifs :

$$\boxed{\text{a) } \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \text{b) } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

Démonstration :

a) Soit $b > 0$, on a : $b \times \frac{1}{b} = 1$. D'où : $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(1) = 0$

Or, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(b) + \ln(\frac{1}{b})$, d'où : $\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = 0$, c'est-à-dire : $\boxed{\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)}$

b) Soient a et b, deux réels strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a\times\frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \underline{\ln(a) - \ln(b)} \text{ (d'après a))}$$

Exemple :

Ecrire le nombre suivant en fonction de ln(2) et ln(3) : $\ln(\frac{12}{18e})$

$\ln(\frac{12}{18e}) = \ln(12) - \ln(18e)$

$= \ln(3\times4) - (\ln(18) + \ln(e))$

$= \ln(3) + \ln(4) - (\ln(9\times2) + 1)$

$= \ln(3) + \ln(2\times2) - (\ln(9) + \ln(2) + 1)$

$= \ln(3) + \ln(2) + \ln(2) - (\ln(3\times3) + \ln(2) + 1)$

$= \ln(3) + 2\ln(2) - (\ln(3) + \ln(3) + \ln(2) + 1)$

$= \underline{-\ln(3) + \ln(2) - 1}$

3) Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée :

a) Soit a , un réel strictement positif et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\ln(a^n) = n\times\ln(a)}$$

b) Soit a un réel strictement positif : $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)}$

Démonstration :

a) $e^{(\ln(a^n))} = a^n$ d'une part et , $e^{n\times\ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^n = a^n$

D'où : $e^{(\ln(a^n))} = e^{n\times\ln(a)}$ (or, $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$)

Donc : $\underline{\ln(a^n) = n\times\ln(a)}$

b) Soit a un réel strictement positif :

$a = \left(\sqrt{a}\right)^2$, d'où : $\ln(a) = \ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$

Donc : $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)}$

Exemples :

a) Ecrire en fonction de ln(2) le nombre suivant : $\ln(\sqrt{32})$

$\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2}\ln(32)$

$= \frac{1}{2}\ln(2^3 \times 2^2) = \frac{1}{2}(\ln(2^3) + \ln(2^2))$

$= \frac{1}{2}(3\ln(2) + 2\ln(2))$

$= \boxed{\frac{5}{2}\ln(2)}$

b) **Résolution d'une inéquation : (détermination d'un seuil)**

Avant, on utilisait la calculatrice ou un programme avec une boucle non bornée (Tant que)

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, (car $-1 < \frac{3}{4} < 1$)

On souhaite déterminer le plus petit entier naturel à partir duquel $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0{,}01$

On a : $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^n < \ln(0{,}01)$ (car ln est une fonction croissante sur]0 ;+∞[)

D'où : $n\ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln(0{,}01)$

ATTENTION : $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

D'où : $n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \simeq 16{,}008$. On va prendre n = 17.

Remarque : Avec le programme Python ci-dessous, on peut résoudre le même problème :

```
n=0
while (3/4)**n >=0.01:
    n=n+1
print(n)
```

On obtient bien **n = 17**

III) Etude de la fonction ln :

1) Dérivabilité et continuité de la fonction ln :

- La fonction ln est dérivable sur]0 ;+∞[et sa dérivée est $\boxed{\frac{1}{x}}$ (= la fonction inverse)

- Comme ln est dérivable sur]0 ;+∞[, elle est aussi continue.

Démonstration :

Soit x > 0 :

On pose $f(x) = e^{\ln(x)} = x$

f est dérivable sur]0 ;+∞[, et $f'(x) = (\ln(x))' \times e^{\ln(x)}$

Or, comme $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

D'où : $(\ln(x))' \times e^{\ln(x)} = 1$, c'est-à-dire : $(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

Remarque : Comme $\frac{1}{x}$ est strictement positive sur]0 ;+∞[, on retrouve que ln est strictement croissante sur cet intervalle.

2) Limites en 0 et en +∞ :

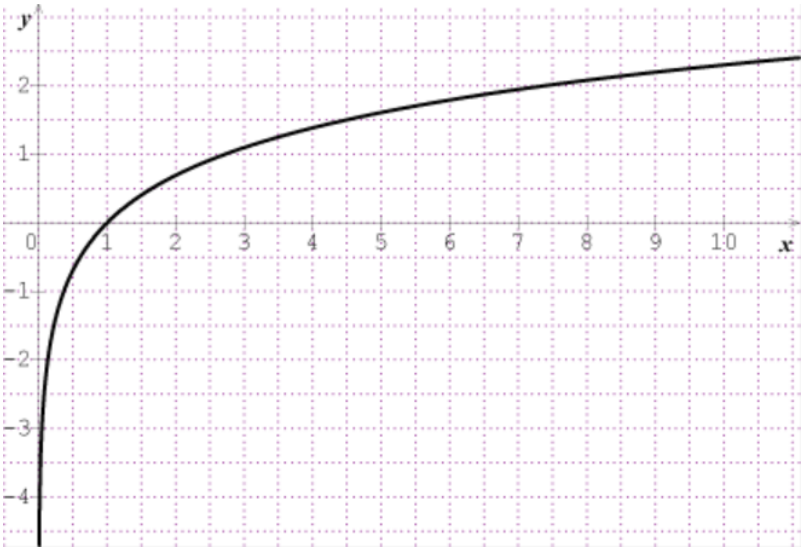
$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

3) Courbe représentative et variations :

Avec les limites précédentes, les variations de ln sur]0 ;+∞[, on peut dresser le tableau de variations :

x	0	+∞
Signe de 1/x	+	
Variations de ln	-∞ ↗	+∞

Courbe de ln :



IV) Fonctions ln(u(x)) :

ln(u(x)) est définie si et seulement si u(x) > 0

Propriété :

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur I⊂ℝ.

Alors, ln(u) est dérivable sur I et :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

Exemple :

Etude des variations de la fonction f définie par :

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

f est définie $\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$

Etude du signe de $\frac{x+1}{x-1}$:

x	-∞		-1		+1		+∞
Signe de x+1	-		0	+		+	
Signe de x – 1	-			-	0	+	
Signe de $\frac{x+1}{x-1}$	+		0	-	‖	+	

D'où :

f est définie sur]-∞ ;-1[∪]1 ;+∞[

f est également dérivable sur]-∞ ;-1[∪]1 ;+∞[,

Or, $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$

On pose $v_1(x) = x + 1$ et $v_2(x) = x - 1$

$v_1'(x) = 1$ $v_2'(x) = 1$

Or, $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)' = \frac{v_1'v_2 - v_1v_2'}{(v_2)^2}$, d'où : $u'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Donc : $f'(x) = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

D'après l'étude de signe faite précédemment, (x – 1)(x + 1) > 0 sur]-∞ ;-1[∪]1 ;+∞[

Donc f '(x) < 0, sur]-∞ ;-1[∪]1 ;+∞[.

Autrement dit : f est strictement décroissante sur]-∞ ;-1[, puis également sur]1 ;+∞[

Détermination des limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$, d'où par quotient, on a une FI du type « ∞/∞ »

On a : $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$, d'où par somme, puis par quotient,

$\frac{x+1}{x-1}$ tend vers 1 quand x tend vers +∞

ln(X) tend vers 0 quand X tend vers 1

Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ (IG : l'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à la courbe de f en +∞)

On raisonne de même en -∞ :

On obtient également : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ (L'axe des abscisses est aussi asymptote horizontale à la courbe de f en -∞)

En -1^- :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x+1 = 0^-$ (car x + 1 < 0, pour x < -1)

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x-1 = -2 < 0$, d'où, par quotient, $\frac{x+1}{x-1}$ tend vers 0^+ quand x tend vers -1^-

Or, ln(X) tend vers $-\infty$, quand X tend vers 0^+

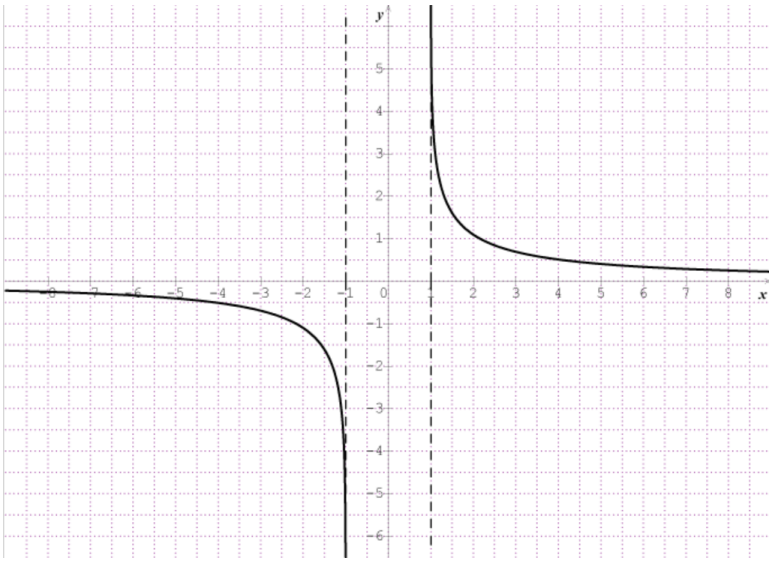
Par composée, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty$ (autrement dit : la droite d'équation x = -1 est asymptote verticale à la courbe de f)

En raisonnant de même en 1^+, on obtient que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$

(autrement dit : la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f)

D'où le tableau de variations de f sur $]-\infty ;-1[\cup]1 ;+\infty[$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de f '(x)	-		‖		‖		-
Variations de f	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	‖	↘ 0	



Courbe de f et ses deux asymptotes verticales