Option Maths complémentaires (M Mangeard)	**Dérivation :** *Rappels / Compléments*	Année scolaire 2020/2021

Introduction :

On a tracé dans un repère orthogonal du plan la parabole représentant la fonction f définie sur ℝ par :

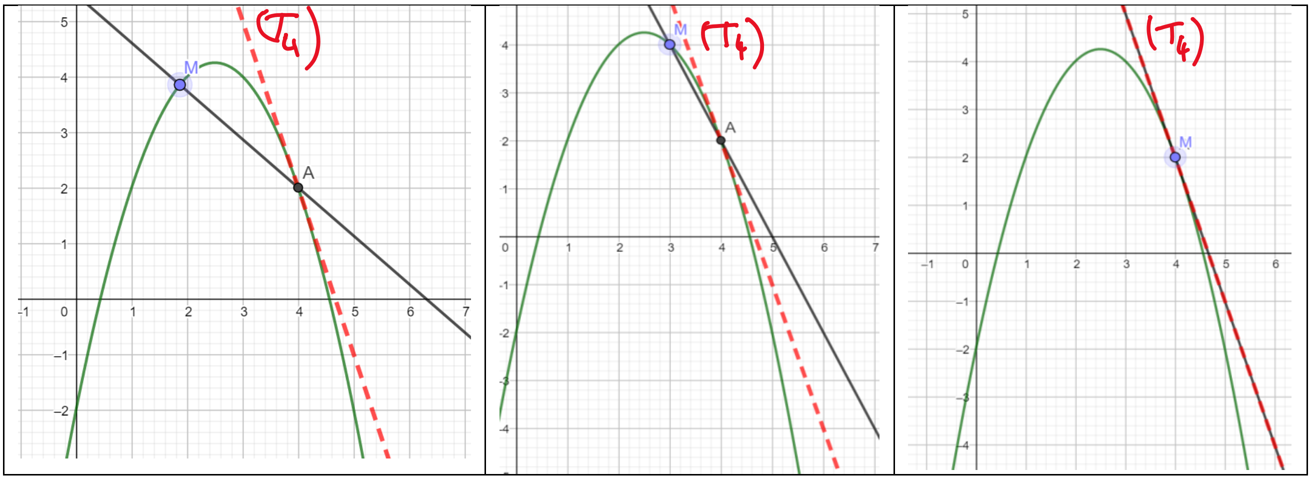
$$f(x) = -x^2 + 5x - 2$$

Le point A a pour coordonnées (4 ;2). C'est un point de la parabole représentant f.

On place sur la parabole un point M mobile.

On trace ensuite la droite (MA).

(T_4) est la tangente à la parabole au point A. (Elle est représentée en pointillés rouges)



Plus le point M se rapproche du point A, et plus (MA) se rapproche de (T_4) pour finir par être confondue avec elle lorsque M est en A.

I) Nombre dérivé :

1) Définition du taux d'accroissement d'une fonction en un point :

Si on note a l'abscisse du point A, son ordonnée est alors f(a) puisque A est un point situé sur la parabole représentant f.

M étant « proche » de A, on peut noter a + h, l'abscisse de M avec h de plus en plus petit s'approchant de zéro au fur et à mesure que M se rapproche de A.

L'ordonnée de M est alors f(a + h)

La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ est *le coefficient directeur de la droite (AM).*

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in D_f$

On définit la fonction t par son expression en fonction de h : $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

t est appelée **taux d'accroissement de f en a**

2) Définition du nombre dérivé en un point :

En fait, si h « s'approche » de zéro sans l'atteindre, alors f(a + h) va « s'approcher » de f(a) sans l'atteindre.

On dit qu'on va faire tendre h vers 0 (avec $h \neq 0$).

On va étudier alors les valeurs prises par le taux d'accroissement t :

Quand h tend vers 0, on va donc regarder vers quoi tend l'expression $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

On dit qu'on étudie la limite quand h tend vers 0 de t(h) :

Notation : $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$

Si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L \in \mathbb{R}$, alors L est **<u>le nombre dérivé de f en a</u>**

<u>Notation</u> : Le nombre L se note f'(a) (se lit « f prime de a »)

<u>Conséquence importante :</u>

Comme on a vu dans l'activité que (MA) se rapproche de la tangente en A au fur et à mesure que M se rapproche de A, et que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de (MA) alors :

f '(a) **<u>est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en a</u>**.

<u>Remarque</u> : Si L = - ∞ ou + ∞ , le nombre dérivé de f en a n'existe pas. (On dit que f n'est pas dérivable en a)

<u>Exemples :</u>

a) Soit f définie par f(x) = x

On souhaite déterminer f '(3) : (c'est-à-dire pour a = 3)

Par définition :

Taux d'accroissement de f en 3 = $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{3+h-3}{h} = 1$

On a : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1$

Donc **<u>f '(3) = 1</u>**

b) Soit g définie par g(x) = mx + p , avec m ≠ 0 et p ∈ ℝ (g est une fonction affine)

Calculer g'(0) :

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{m(0+h)+p-p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

D'où : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} m = m$ Donc : **<u>g'(0) = m</u>**

c) Soit i définie par : i(x) = x^2 . On souhaite calculer i'(1).

$\frac{i(1+h)-i(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h\times(h+2)}{h} = h + 2$

D'où : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{i(1+h)-i(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h + 2 = 2$

Donc : **<u>i'(1) = 2</u>**

d) Soit j définie par j(x) = $3x^2 - 3x + 1$. On souhaite calculer j'(1)

j'(1) est le coefficient directeur de la tangente à la parabole représentant j au point d'abscisse 1.

$$\frac{j(1+h)-j(1)}{h} = \frac{3(1+h)^2-3(1+h)+1-(3\times1^2-3\times1+1)}{h}$$
$$= \frac{3(1+h^2+2h)-3-3h+1-1}{h}$$
$$= \frac{3+3h^2+6h-3-3h}{h}$$
$$= \frac{3h^2+3h}{h} = \frac{3h\times(h+1)}{h} = 3h + 3$$

D'où : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{j(1+h)-j(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 3h + 3 = 3$

Donc : **<u>j'(1) = 3</u>**

e) Soit k définie par k(x) = x^3. On souhaite calculer k'(-1)

$$\frac{k(-1+h)-k(-1)}{h} = \frac{(h-1)^3-(-1)^3}{h} = \frac{(h-1)\times(h^2-2h+1)-(-1)}{h}$$
$$= \frac{h^3-2h^2+h-h^2+2h-1+1}{h}$$
$$= \frac{h^3-3h^2+3h}{h}$$

$$= \frac{h\times(h^2-3h+3)}{h}$$

$$= h^2 - 3h + 3$$

D'où : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{k(-1+h)-k(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^2 - 3h + 3 = 3$

Donc : k'(-1) = 3.

La tangente à la courbe en x = - 1 a pour équation réduite y = 3 x + 2

II) Tangente à une courbe en un point :

On considère une fonction f, (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan et A (a ; f(a)) un point de (C_f).

Si on note (T_a) la tangente à (C_f) au point d'abscisse a, on sait déjà que f'(a) est le coefficient directeur de (T_a)

Propriété :

L'équation réduite de (T_a) est : y = f '(a)(x – a) + f(a)

Exemples :

a) Reprenons l'exemple précédent avec la fonction cube et le point A(-1;- 1)
On a vu que f '(-1) = 3
Or, f(-1) = $(-1)^3$ = - 1
D'où : y = 3(x - (-1)) - 1 = 3x + 3 – 1 = **3x + 2**

b) Soit f la fonction définie par f(x) = $\sqrt{x}$ sur [0;+∞[
Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Voici un tableau de quelques valeurs de $\frac{1}{\sqrt{h}}$ quand h devient de plus en plus petit en s'approchant de zéro :

h	$\frac{1}{\sqrt{h}}$ (au centième)
0.5	1,41
0.05	4,47
0.005	14,14
0.0005	44,72
0.00005	141,42
0.000005	447,21
0.0000005	1414,21
0.00000005	4472,14
0.000000005	14142,14
0.0000000005	44721,36

Conjecture : Plus h diminue en s'approchant de zéro, plus $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient grand.

On dit que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers + ∞, lorsque h tend vers 0

Notation sous la forme de limite :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Par conséquent, **f '(0) n'existe pas**.

La courbe de f admet une tangente verticale en x = 0

III) Fonction dérivée :

1) Définition :

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si le nombre dérivé de f existe pour **toutes** les valeurs x de I, on dit que f est dérivable sur I.

La fonction qui à x associe f '(x) s'appelle l**a fonction dérivée de f** (ou la dérivée de f) et elle se note f '.

2) Dérivées de fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de dérivabilité (où la dérivée est définie)	Dérivée
mx + p (avec m et p $\in\mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	2x
x^n (avec $n\in\mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x

Exemples :

a) Soit f définie par $f(x) = x^3$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, $f'(x) = 3x^2$

b) Soit g définie par $g(x) = \frac{4}{5}x - 2$.   g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, $g'(x) = \frac{4}{5}$

3) Dérivée d'une somme :

Soient u et v, deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors u + v est aussi dérivable sur I et

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Démonstration :

Soit $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$:

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}$$
$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Or, $(u + v)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$

et $u'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ et $v'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$

D'où : pour tout $a \in I$, $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$

Par conséquent : **$(u + v)' = u' + v'$**

Exemple :

Soit $f(x) = x^4 + 7x - 2 = g(x) + h(x)$ où $g(x) = x^4$ et $h(x) = 7x - 2$
Or, $g'(x) = 4x^3$ et $h'(x) = 7$

Donc **$f'(x) = 4x^3 + 7$**

4) Dérivée de ku, avec $k \in \mathbb{R}$:

Soit u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$:

(ku) est aussi dérivable sur I et $\boxed{(ku)' = k\times u'}$

Exemple :

Soit $f(x) = 5x^3$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5\times 3x^2 =$ **$15x^2$**

5) Dérivée de uxv :

Soient u et v, deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

u×v est dérivable sur I et $\boxed{(u\times v)' = u'v + uv'}$

Exemple :

Soit $f(x) = 7x^2\sqrt{x}$ f est dérivable sur $]0;+\infty[$

On pose $u(x) = 7x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On a : $u'(x) = 7\times 2x = 14x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Or, $(uv)' = u'v + uv'$

D'où :

$$f'(x) = 14x\sqrt{x} + 7x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{14x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+7x^2}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{28x^2+7x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{35x^2}{2\sqrt{x}}}$$

6) Dérivée de $\frac{1}{u}$:

On considère une fonction u. On se place sur un intervalle I sur lequel u est définie, dérivable et **où elle ne s'annule pas.**

Alors, $\frac{1}{u}$ est dérivable et :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On pose $u(x) = x^2 + 1$ $u'(x) = 2x$

D'où : $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

7) Dérivée de $\frac{u}{v}$:

On considère u et v, deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on suppose que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Alors : $\frac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+1}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 4x - 1$ et $v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2x$

Or, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4(x^2+1)-2x(4x-1)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-4x^2+2x+4}{(x^2+1)^2}$

Remarque : il est vivement conseillé de ne pas développer le dénominateur.

En effet, on connaît son signe : c'est un carré, il est positif.

8) Dérivée de la composée f(ax+b), où f est une fonction :

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I\subset\mathbb{R}$, telle que $ax + b \in I$.

Alors f(ax+b) est dérivable sur I et :

$$\boxed{f'(ax+b) = a \times f'(ax+b)}$$

Exemple :

Soit $g(x) = \sqrt{3x+2} = f(3x+2)$, où $f(x) = \sqrt{x}$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g est définie $\Leftrightarrow 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$

g est dérivable $\Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$, donc : g est dérivable sur $]-\frac{2}{3};+\infty[$

De plus, $f'(3x + 2) = 3 \times f'(3x + 2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}$

Compléments :

a) Soit u une fonction strictement positive sur $I \subset \mathbb{R}$. Alors, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Exemple :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, car si on pose $u(x) = x^2 + 1$

$u(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$u'(x) = 2x$

Or, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

D'où : $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$

b) Soit u une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Alors, u^n est dérivable sur I et : **$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$**

Remarque : si n est un entier strictement négatif, il faudra vérifier que $u(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$

Exemple :

Soit $f(x) = (5x^3 + 1)^6$

On pose $u(x) = 5x^3 + 1$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme et $u'(x) = 15x^2$

f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $n = 6$

Or, $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$, d'où : $f'(x) = 6\times15x^2(5x^3 + 1)^5 = \underline{90x^2(5x^3 + 1)^5}$

c) Soit u une fonction dérivable sur $I\subset \mathbb{R}$,

e^u est dérivable sur I et **$(e^u)' = u'e^u$**

Exemple :

$f(x) = e^{1/x}$. On pose : $u(x) = \frac{1}{x}$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

On a : $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Or, $(e^u)' = u'e^u$

D'où : $\mathbf{f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}}$

IV) Variations :