

Option Maths Complémentaires (M Mangeard)	<u>Convexité</u>	Année scolaire 2020/2021
---	-------------------------	-----------------------------

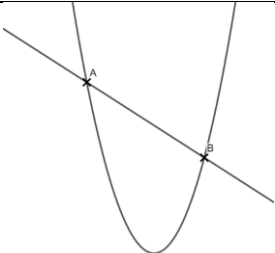
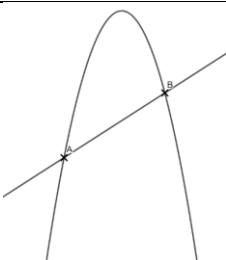
Pré requis : Les formules de dérivation avec leurs compléments

I) Approche graphique de la convexité :

1) Fonction convexe / Fonction concave :

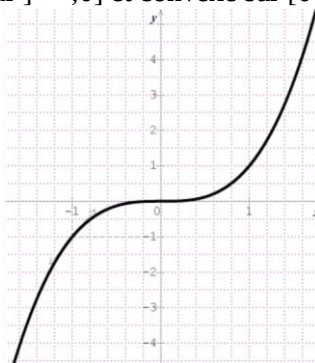
On considère une fonction f sur un intervalle I , a et b , deux nombres tels que :

$a < b$ avec $a, b \in I$. Le point A a pour coordonnées $(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$

	
Sur l'intervalle $[a ; b]$, la courbe de f est située sous la droite sécante (AB) On dit que f est convexe sur I	Sur l'intervalle $[a ; b]$, la courbe de f est située au-dessus de la droite sécante (AB) On dit que f est concave sur I

Quelques exemples classiques :

- La fonction carré, la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$
- La fonction racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$
- La fonction cube est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$



2) Lien avec les tangentes :

Propriété :

On considère une fonction f définie sur un ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ et C_f , sa courbe représentative dans un repère.

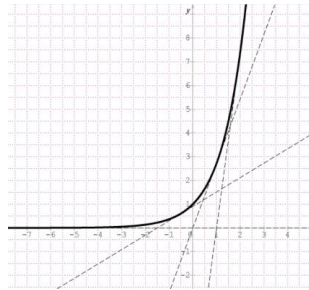
Soit I un intervalle contenu dans D_f :

f est convexe sur $I \Leftrightarrow C_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes

f est concave sur $I \Leftrightarrow C_f$ est située en dessous de toutes ses tangentes

Exemples :

- La fonction exponentielle, qui est convexe, a sa courbe représentative située toujours au-dessus de ses tangentes :



Remarque :

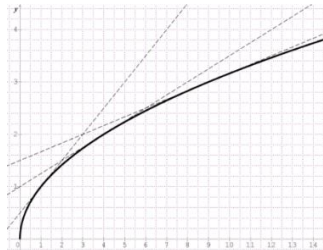
En particulier, si on considère $a = 0$.

La courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de la tangente en $a = 0$.

Or, l'équation réduite de cette tangente est $y = x + 1$

Donc : $e^x \geq 1 + x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui permet de prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ par comparaison.

- La courbe représentative de la fonction racine carrée, qui est concave, est toujours située en dessous de ses tangentes :

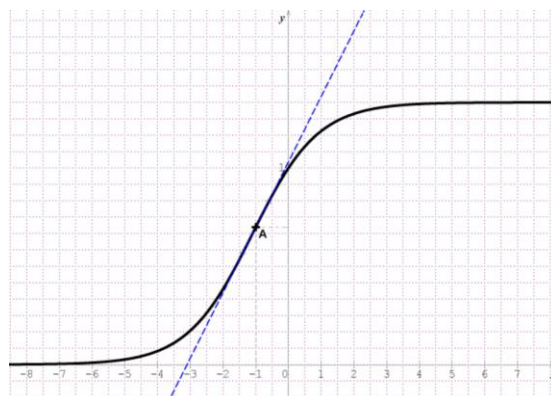


3) Point d'inflexion :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Soit $A(a ; f(a))$ un point de C_f .

On dit que A est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse en A sa tangente.



Remarque : En A, la fonction ainsi représentée change de convexité : ici, elle passe de convexe à concave.

Exemple : la fonction cube change de convexité en 0. Elle passe de concave sur $]-\infty ; 0]$ à convexe sur $[0 ; +\infty[$. L'origine du repère est donc un point d'inflexion de C_f .

II) Caractérisations de la convexité des fonctions dérivables :

Notion de dérivée seconde d'une fonction :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Si f' est elle-même dérivable sur I , on dit alors que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la fonction dérivée de f' (on appelle f'' la dérivée seconde de f)

Par exemple : les fonctions polynômes sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

Exemple de calcul de f'' :

Soit $f(x) = 7e^{-3x+2}$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 7 \times (-3)e^{-3x+2} \quad \text{et donc} \quad f''(x) = -21 \times (-3)e^{-3x+2} = \underline{63 e^{-3x+2}}$$

1) Propriétés (admisses) :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I

f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow f''$ est positive sur I
f est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow f''$ est négative sur I

Exemples :

a) Soit $f(x) = x^3$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$

d'où : $f''(x) = 6x$.

Or, $6x \leq 0$, pour $x \leq 0$ et $6x \geq 0$, pour $x \geq 0$

On retrouve le fait que la fonction cube est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$

b) Soit $g(x) = \sqrt{x}$. g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g' est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. On pose $u(x) = 2\sqrt{x}$ alors $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\text{Or, } \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}, \text{ d'où : } g''(x) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \text{ pour tout } x \in]0 ; +\infty[$$

Donc : g est concave sur $]0 ; +\infty[$ (déjà vu précédemment)

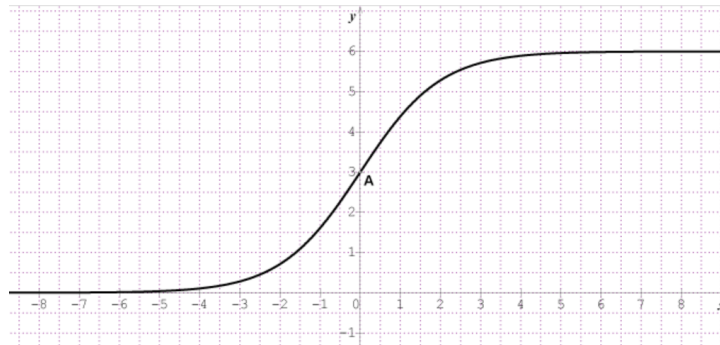
2) Point d'inflexion :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . On considère $a \in I$. On note (C_f) la courbe de f dans un repère du plan :

(C_f) admet un point d'inflexion au point d'abscisse $a \Leftrightarrow f'$ change de sens de variation en a $\Leftrightarrow f''$ s'annule et change de signe en a
--

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{6}{e^{-x} + 1}$



Conjecture : il semblerait que le point $A(0 ; 3)$ soit un point d'inflexion de (C_f)

Démonstration :

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{-6e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$ (calculs à faire !)

et $f''(x) = \frac{6e^{-x}(e^{-x}-1)}{(e^{-x}+1)^3}$ (calculs à faire également !)

on a $6e^{-x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^{-x} + 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^{-x} + 1)^3 > 0$

Autrement dit : le signe de $f''(x)$ dépend uniquement de celui de $e^{-x} - 1$

Or, $e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ et $e^{-x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc $f''(x)$ s'annule et change de signe en 0.

Donc : le point d'abscisse 0 est point d'inflexion pour la courbe de f .

Ses coordonnées complètes sont : $(0 ; f(0) = 3)$