

Exercice 1 :

Voici le diagramme en barres associé à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale dont le paramètre p vaut 0,5 et l'espérance mathématique est un entier :



1) Calculer n en justifiant.

Le diagramme en barres est centré sur $E(X)$. Comme $E(X) \in \mathbb{N}$, alors
 $E(X) = 8 = n \times p = n \times 0,5$, d'où $n = \frac{8}{0,5} = \underline{16}$

2) a) Donner la formule permettant de calculer $P(X=7)$

$$P(X=7) = \binom{16}{7} \times p^7 \times (1-p)^{16-7} \quad (\text{Formule: } P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k})$$

$$= \binom{16}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

b) A l'aide de la calculatrice, calculer cette probabilité à 10^{-4} près

$$P(X=7) \approx \underline{0,1746}$$

3) Calculer les probabilités suivantes en détaillant les étapes, si nécessaire :

a) $P(X \leq 12)$

$$\text{A la calculatrice: } P(X \leq 12) \approx \underline{0,9894}$$

b) $P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9)$

$$\approx \underline{0,2272}$$

c) $P(4 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 4-1)$

$$= P(X \leq 15) - P(X \leq 3)$$

$$\approx \underline{0,9893}$$

4) Calculer $V(X)$, puis $\sigma(X)$ en donnant les formules.

$$\begin{aligned} \underline{V(X)} &= n \times p \times (1-p) \\ &= 16 \times 0,5 \times 0,5 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16 \times \frac{1}{4} = \underline{4} \end{aligned}$$

$$\text{or, } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}, \text{ d'où } \underline{\sigma(X) = 2}$$

Exercice 2 :

1) Calculer à l'aide de la calculatrice $\binom{22}{7}$ et $\binom{22}{8}$

$$\text{A la calculatrice: } \binom{22}{7} = \underline{170\,544} \quad \text{et} \quad \binom{22}{8} = \underline{319\,770}$$

2) Sans calculatrice, en déduire, en justifiant :

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{22}{15} &= ? \\ \text{or, } \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \text{avec ici } n &= 22, \quad k = 15 \quad \text{et} \quad n - k = 22 - 15 = 7 \\ \text{Donc: } \underline{\binom{22}{15}} &= \binom{22}{7} = \underline{170\,544} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \binom{23}{8} &= ? \\ \text{or, } \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{d'après le triangle de Pascal}) \\ n &= 23, \quad k = 8, \quad \text{on a } n-1 = 22 \quad \text{et} \quad k-1 = 7 \\ \text{D'où: } \underline{\binom{23}{8}} &= \binom{22}{8} + \binom{22}{7} = 319\,770 + 170\,544 \\ &= \underline{490\,314} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

On lance un dé parfaitement équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8.

1) On considère la variable aléatoire X donnant le résultat obtenu en lançant le dé une fois.

Quelle est la loi de X ? Justifier.

↳ Le dé étant parfaitement équilibré : il y a équiprobabilité
 X suit donc la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

2) Calculer $P(X=8)$

$$P(X=8) = \frac{1}{n} = \underline{\frac{1}{8}} \quad (\text{car } X \text{ suit la loi uniforme sur } \{1; 2; \dots; 8\})$$

3) Calculer $P(X > 5)$

$$\begin{aligned} \underline{P(X > 5)} &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}} \end{aligned}$$

4) Calculer $E(X)$ en justifiant.

Comme X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$,

$$\underline{E(X)} = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} = \underline{\underline{4,5}}$$