Option Maths Complémentaires (M Mangeard)	**Corrigé du contrôle de mathématiques :** *Calculs de limites : en +∞, en une valeur finie limite à droite, à gauche/Asymptotes*	Fait le mercredi 16 décembre 2020

Exercice 1 :

Soit f(x) = $\frac{3x+5}{4x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

f est définie $\Leftrightarrow 4x-2 \neq 0$

or, $4x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

2) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} f(x)$, puis $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} 3x+5 = 3\times\frac{1}{2}+5 = \frac{13}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} 4x-2 = 0^-$ (car $4x-2<0$, pour $x<\frac{1}{2}$)

D'après la règle des signes des quotients :

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} 3x+5 = \frac{13}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} 4x-2 = 0^+$ (car $4x-2>0$, pour $x>\frac{1}{2}$)

D'après la règle des signes des quotients :

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$

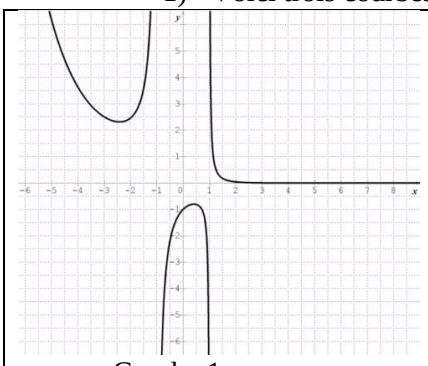
3) Interpréter graphiquement les limites obtenues (faire une phrase)

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$

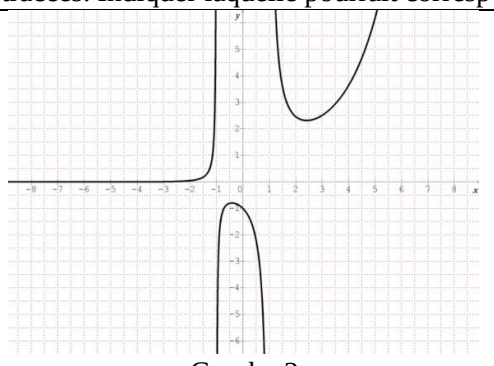
Exercice 2 :

On considère une fonction g, telle que : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

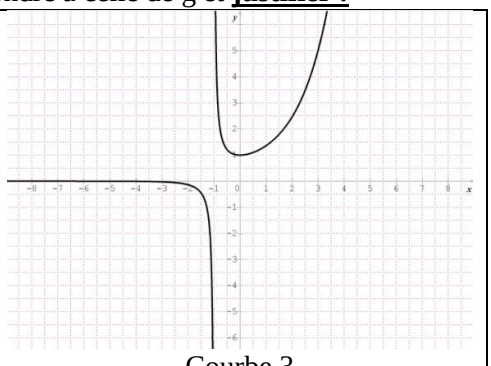
1) Voici trois courbes tracées. Indiquer laquelle pourrait correspondre à celle de g et **justifier :**



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, la courbe ① est éliminée

or, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x) = +\infty$, c'est donc la courbe ② (les autres critères étant bien vérifiés)

2) Déterminer les asymptotes à la courbe de g en justifiant par les limites correspondantes.

comme $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_g)$

comme $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = 0$ (= l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_g)$ en $-\infty$.

Exercice 3 :

Calculer en justifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x+5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$

Par somme, on a une FI du type "$\infty - \infty$"

$$\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x+5} = \frac{x^2\left(3-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

Par somme, puis par quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x+5} = \frac{3}{2}$$