

Option Maths Complémentaires (M Mangeard)	Corrigé du contrôle de mathématiques : (Cours/Limites de suites)	Fait le jeudi 15/10/2020
---	--	--------------------------

Exercice 1 : Cours (/6 pts)

1) Compléter le tableau suivant :

Valeurs de q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

- 2) Donner les formes indéterminées des limites : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$
 3) Énoncer le théorème d'encadrement :

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) , trois suites telles qu'à partir d'un certain rang,

$v_n \leq u_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$, avec $L \in \mathbb{R}$.

Alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Exercice 2 : Calculs de limites (/14 pts)

Calculer les limites suivantes en justifiant :

1) $u_n = 3\sqrt{n} + 5n^2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$
 Par produit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$
 Par produit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 = +\infty$

donc, par somme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} + 5n^2 = +\infty$

2) $v_n = 6 + \frac{7}{n^2}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 = 7$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
 Par quotient: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 = 6$
 Par somme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 + \frac{7}{n^2} = 6$

3) $w_n = 4n^2 - n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$
 Par somme, on a une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ "

$4n^2 - n = n^2 \left(4 - \frac{1}{n}\right) = n^2 \left(4 - \frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Par différence: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - \frac{1}{n} = 4$
 Par produit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(4 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$

4) $x_n = \frac{2n^3 + 6n}{3n^3 + 1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n = +\infty$
 Par somme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 + 6n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^3 + 1 = +\infty$, Par quotient: on a une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\frac{2n^3 + 6n}{3n^3 + 1} = \frac{n^3(2 + \frac{6}{n^2})}{n^3(3 + \frac{1}{n^3})} = \frac{2 + \frac{6}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

d'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{6}{n^2} = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n^3} = 3$ } Par quotient: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{6}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^3}} = \frac{2}{3}$

$$5) y_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où: } -\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

D'après le théorème d'encadrement, (y_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

$$6) z_n = n^2 + \cos(n)$$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où: } n^2 - 1 \leq n^2 + \cos(n) \leq n^2 + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty, \text{ d'après un théorème de comparaison:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + \cos(n) = +\infty$$

$$7) a_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

$$\text{or, } \frac{\pi}{2} > 1, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n = +\infty$$

$$8) b_n = 7 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{or, } -1 < \frac{2}{3} < 1, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Par différence:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 7$$