Option Maths complémentaires (M Mangeard)	**Corrigé du DM de mathématiques :** *Loi binomiale / Rappels de dérivation de Première*	Rendu le jeudi 18 février 2021 (dernier délai)

Exercice 1 :

Dans une entreprise de conception de pièces mécaniques, on effectue un contrôle qualité en bout de chaîne.

Soit la pièce est en bon état, soit elle présente des défauts.

On estime que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit sans défaut est de 0,82.

On effectue quarante prélèvements indépendants.

1) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces sans défaut à l'issue des quarante prélèvements. Montrer soigneusement qu'on est en présence d'un schéma de Bernoulli et que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On répète 40 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli
(2 issues → Succès : La pièce est sans défaut
→ Echec : La pièce est défectueuse) de paramètre $p = 0,82$
La situation est assimilable à une succession de tirages avec remise.
On modélise par un schéma de Bernoulli.
X est une variable aléatoire qui compte les succès à l'issue des 40 prélèvements
Donc : X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(40 ; 0,82)$

2) Calculer en justifiant P(X = 30)

$P(X=30) = \binom{40}{30} \times 0,82^{30} \times (1-0,82)^{40-30}$

$\simeq 0,0786$ (à la calculatrice)

3) Calculer la probabilité que plus de 80% des pièces prélevées soient sans défaut.

$\frac{80}{100} \times 40 = 32$

$P(X > 32) = 1 - P(X \leq 32)$

$\simeq 0,5663$ (à la calculatrice)

4) Calculer $P(30 \leq X \leq 34)$

$P(30 \leq X \leq 34) = P(X \leq 34) - P(X \leq 29)$

$\simeq 0,6587$ (à la calculatrice)

5) Calculer, en justifiant, le nombre moyen de pièces sans défaut.

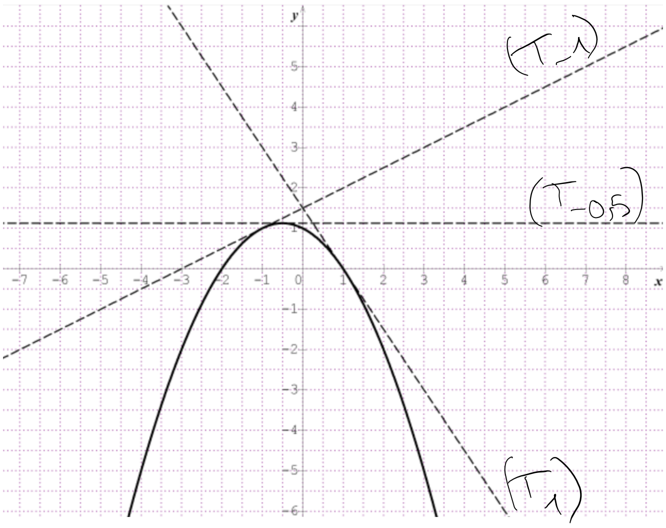
Comme X suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}82)$

$$E(X) = n \times p = 40 \times 0{,}82 \simeq 33$$

En moyenne, il y a environ 33 pièces sans défaut

Exercice 2 :

On a tracé la courbe d'une fonction f dans un repère du plan et trois de ses tangentes : (T_{-1}), $(T_{-0,5})$ et (T_1) respectivement aux points d'abscisses : -1 ; -0,5 et 1.



1) Par lecture graphique, déterminer f(2), f(-3), f '(-1), f '($-\frac{1}{2}$), f '(1)

$f(2) = -2$, $f(-3) = -2$, $f'(-1)$: coefficient directeur de (T_{-1})

$$f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+1}{+2} = \frac{1}{2}$$

$f'(-\frac{1}{2})$: coefficient directeur de $(T_{-\frac{1}{2}})$

Or, $(T_{-\frac{1}{2}})$ est horizontale. D'où $f'(-\frac{1}{2}) = 0$

$f'(1)$: coefficient directeur de (T_1)

$$f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1{,}5}{+1} = -1{,}5$$

2) En déduire l'équation réduite de (T_{-1})

(T_{-1}) : $y = \frac{1}{2}x + p$, or par lecture graphique $p = 1{,}5$

Donc : l'équation réduite de (T_{-1}) est $y = \frac{1}{2}x + 1{,}5$

3) Sachant que f(x) = $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. Calculer f '(-1) de **deux manières différentes** et comparer avec le résultat obtenu par lecture graphique dans la question 1)

Méthode ① :

Soit $h \neq 0$:

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{-\frac{1}{2}(h-1)^2 - \frac{1}{2}(h-1) + 1 - \left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{1}{2}(-1) + 1\right)}{h}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(h^2 - 2h + 1) - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2} + \cancel{1} - \cancel{1}}{h}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}h^2 + h - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}h + \cancel{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}\left(-\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\right)}{\cancel{h}} = -\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}$$

or, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} -\frac{1}{2}h + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < +\infty$, donc f est dérivable en -1

et $f'(-1) = \frac{1}{2}$ (on retrouve le résultat de la question 1))

Méthode ② :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

or, $f'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$

d'où $f'(-1) = -(-1) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (même chose)