Option Maths complémentaires (M Mangeard)	**Corrigé du devoir maison de mathématiques :** *Limites de fonctions /Variations/ Asymptotes*	Rendu le jeudi 7 janvier 2021

Exercice 1 :

Soit $f(x) = \frac{7x+5}{4-x}$

1) Déterminer soigneusement D_f, le domaine de définition de f le plus grand possible.

f est définie $\Leftrightarrow 4-x \neq 0$

or, $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 7x+5 = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} 4-x = +\infty$
Par quotient, on a une FI du type "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\frac{7x+5}{4-x} = \frac{\cancel{x}(7+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(\frac{4}{x}-1)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} 7+\frac{5}{x} = 7$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x} - 1 = -1$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -7$

On raisonne de même en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -7$

b) Interpréter géométriquement ces limites

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -7 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, alors la droite d'équation $y=-7$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $\pm\infty$

3) a) Calculer en justifiant $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} 7x+5 = 7\times4+5 = 33 > 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} 4-x = 0^+$ (car $4-x>0$, si $x<4$)

En appliquant la règle des signes du quotient :

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} 7x+5 = 7\times4+5 = 33>0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} 4-x = 0^-$ (car $4-x<0$, si $x>4$)

d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x) = -\infty$

b) Interpréter géométriquement ces limites

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe de f.

4) Calculer f '(x)

f est dérivable sur D_f (car un quotient est dérivable partout où il est défini)

On pose $u(x) = 7x + 5$ $\quad v(x) = 4 - x$

$u'(x) = 7$ $\quad v'(x) = -1$

or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

d'où $f'(x) = \frac{7(4-x) - (-1)\times(7x+5)}{(4-x)^2}$

$= \frac{28 \cancel{-7x} \cancel{+7x} + 5}{(4-x)^2} = \frac{33}{(4-x)^2}$

5) En déduire les variations de f. Dresser son tableau de variations sur ℝ

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $\frac{33}{(4-x)^2} > 0$ (en effet $33 > 0$, et $(4-x)^2 > 0$)

D'où f strictement croissante sur D_f.

On en déduit le tableau de variation de f sur D_f :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	‖	$+$	
Variation de f	-7 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ -7

(les limites ont été calculées dans les questions précédentes)

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes en justifiant :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$) Par différence, on a une FI du type "$\infty - \infty$"

$e^x - x = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = 1$

de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} e^x \sin(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

or, $e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

D'où : $-e^x \leq e^x \sin(x) \leq e^x$

or, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \to -\infty} -e^x$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \sin(x) = 0$$

IG : La droite d'équation $y = 0$ (= l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe de la fonction f telle que $f(x) = e^x \sin(x)$.

3) $\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{2x+6}$

$\lim_{x \to -3} x+3 = 0$

$\lim_{x \to -3} 2x+6 = 2\times(-3)+6 = 0$

Par quotient, on a une FI du type : "$\frac{0}{0}$"

or, $\frac{x+3}{2x+6} = \frac{x+3}{2(x+3)} = \frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{2x+6} = \frac{1}{2}$